



دانشگاه صنعتی سهند

DOR:

[20.1001.1.23223146.1400.8.1.1.0](https://doi.org/10.1001.1.23223146.1400.8.1.1.0)

نشریه علمی-فصلنامه‌ای در مهندسی برق

دوره ۸ - شماره ۱

بهار و تابستان ۱۴۰۰

صفحات ۴ الی ۳۴

ISSN: 2322-3146

<http://journals.sut.ac.ir/jnsee>

# مش‌بندی مجدد غیرایزوتروپیک مدل‌های سه‌بعدی با رویکرد نمونه‌برداری افقی

لیدا اصغریان<sup>۱</sup> و حسین ابراهیم‌نژاد<sup>۲</sup>

<sup>۱</sup> دانشجوی دکتری مهندسی برق مخابرات، آزمایشگاه تحقیقاتی بینایی کامپیوتر، دانشکده مهندسی برق،

دانشگاه صنعتی سهند، تبریز، ایران، [L\\_asgharian@sut.ac.ir](mailto:L_asgharian@sut.ac.ir)

<sup>۲</sup> نویسنده مسئول، استاد مخابرات، آزمایشگاه تحقیقاتی بینایی کامپیوتر، دانشکده مهندسی برق، دانشگاه

صنعتی سهند، تبریز، ایران، [ebrahimnezhad@sut.ac.ir](mailto:ebrahimnezhad@sut.ac.ir)

(تاریخ دریافت مقاله: ۱۳۹۸/۰۴/۲۹ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۳۹۹/۰۸/۲۲)

## چکیده

### واژه‌های کلیدی

ساده‌سازی مش سه‌بعدی،

نمونه‌برداری نایکوئیست،

مش‌بندی غیرایزوتروپیک،

حفظ جزئیات.

امروزه گسترش گوشی‌های هوشمند و نرم‌افزارهای سه‌بعدی به کار رفته در این سیستم‌ها، نیاز به پردازش سریع مدل‌های سه‌بعدی را کاملاً آشکار می‌سازد. ولی حجم بالای رئوس و وجوه موجود در مدل‌های سه‌بعدی، سرعت ارسال و دریافت داده‌ها را کاهش داده و حافظه ذخیره‌سازی بیشتری را می‌طلبد. در این مقاله، روشی برای مش‌بندی مجدد غیرایزوتروپیک مدل‌های سه‌بعدی پیشنهاد می‌شود. در این روش از معیار نایکوئیست برای نمونه‌برداری از مدل اصلی استفاده می‌شود. این معیار به صورت محلی بر روی هر بخش از مش اعمال شده و فرآیند نمونه‌برداری را انجام می‌دهد. سپس، مش‌بندی مجدد به نقاط نمونه‌برداری شده افزوده شده و مدل ساده‌سازی شده تشکیل می‌شود. جهت کسب مدل با کیفیت بالا از مدل مش‌بندی شده جدید از یک روش درونیابی زیرتقسیم غیرخطی استفاده می‌شود. نتایج به دست آمده نشان می‌دهند که الگوریتم ارائه شده علاوه بر کاهش تعداد رئوس و وجوه مدل، توانایی حفظ جزئیات را به خوبی دارد. الگوریتم پیشنهادی با روش‌های شناخته شده در زمینه ساده‌سازی مش مقایسه شده و نتایج به دست آمده گویای توانایی روش پیشنهادی در بازسازی مدلی با کیفیت بالا هستند.



Sahand University  
of Technology

DOR:

[20.1001.1.23223146.1400.8.1.1.0](https://doi.org/10.1001.1.23223146.1400.8.1.1.0)

Journal of Nonlinear  
Systems in Electrical  
Engineering

Vol.8, No.1

Spring and Summer 2021

ISSN: 2322 – 3146

<http://journals.sut.ac.ir/jnsee>

# Anisotropic Re-meshing of 3D Models Based on Adaptive Sampling

Lida Asgharian<sup>1</sup> and Hossein Ebrahimnezhad<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Ph.D. student, Computer Vision Res. Lab, Electrical Engineering Department, Sahand University of Technology, [L\\_asgharian@sut.ac.ir](mailto:L_asgharian@sut.ac.ir)

<sup>2</sup>**Corresponding Author**, Professor, Computer Vision Res. Lab, Electrical Engineering Faculty, Sahand University of Technology, [ebrahimnezhad@sut.ac.ir](mailto:ebrahimnezhad@sut.ac.ir)

## ABSTRACT

### Keywords

3D mesh simplification,  
Nyquist sampling,  
Anisotropic Re-meshing,  
Detail preserving.

Nowadays, various kinds of smart phones and 3D softwares are produced, which require large memory space. However, the large number of vertices and faces in 3D models not only decreases the speed of data transfer, but also can cause problem in low memory systems. In this paper, an anisotropic re-meshing of 3D models is proposed. In this algorithm, the Nyquist theorem is employed for local sampling from the mesh surface. Then, the re-triangulation algorithm is applied to the selected samples to construct the simplified mesh. In order to construct a high quality mesh from the remeshed model, a subdivision operation is also employed to better represent the details. The achieved results show that the algorithm can reduce the number of vertices and faces while preserving the details of the model. The proposed method is also compared to the state-of-the-art algorithms used in simplification studies. The outcomes illustrate the ability of the proposed method in producing high quality models.

## ۱- مقدمه

در دهه اخیر با توجه به گسترش تنوع گوشی‌های هوشمند و نرم‌افزارهای سه‌بعدی موجود در بازار، پردازش مدل‌های سه‌بعدی بیشتر از زمان‌های گذشته مورد توجه قرار گرفته است. امروزه صنعت انیمیشن‌سازی نقش بسزایی در طراحی و ساخت شخصیت‌های سه‌بعدی دارد. به طوری که از این شخصیت‌ها می‌توان در تهیه فیلم‌ها، کارتون‌ها و بازی‌های کامپیوتری استفاده نمود. برای بالا بردن کیفیت فیلم‌ها و بازی‌ها و همچنین طبیعی تر جلوه دادن صحنه‌ها معمولاً از حجم بالایی از رئوس و وجوه در ساخت مدل سه‌بعدی استفاده می‌شود. اگرچه با افزایش حجم رئوس می‌توان کیفیت مدل را بالاتر برد اما در اثر این کار، سرعت ارسال و دریافت اطلاعات کاهش می‌یابد. بنابراین، ارائه راهکارهایی جهت افزایش سرعت انتقال اطلاعات در حالی که کیفیت مدل اصلی نیز حفظ شود، از جمله مسائل مهم در زمینه پردازش مدل‌های سه‌بعدی محسوب می‌شود.

با استفاده از الگوریتم‌های ساده‌سازی و فشرده‌سازی مش می‌توان حجم داده‌های ارسالی را کاهش داده و در گیرنده نیز به کیفیت بالایی از مش ساده‌سازی شده رسید. در این مقاله، روشی برای ساده‌سازی مش سه‌بعدی ارائه می‌شود. به طوری که مدل ساده‌سازی شده پس از ارسال به مقصد، قابلیت بازسازی با کیفیت بالا را داشته باشد. بسیاری از روش‌هایی که در تحقیقات گذشته برای بازیابی مش مطرح شده‌اند بر مبنای محاسبه خطا و کاهش خطای کسب شده در هر مرحله از بازسازی می‌باشند. در این روش‌ها حجم بالایی از محاسبه خطا بین مش بازسازی شده و مش اصلی انجام می‌شود تا در نهایت مشی با کیفیت بالا به دست آید. در مقاله حاضر، روشی بر مبنای نمونه‌برداری نایکوئیست<sup>۱</sup> مطرح می‌شود تا با انجام نمونه‌برداری با نرخ صحیح، امکان بازسازی یک مرحله‌ای مدل سه‌بعدی را میسر ساخته و از انجام چند مرحله‌ای و تکراری محاسبه خطا در مرحله بازسازی جلوگیری کرد. مدل ساده شده، حجم پایینی از اطلاعات را دارا می‌باشد که قابلیت ذخیره‌سازی در حافظه‌های کم ظرفیت را نیز دارد. علاوه بر این، سیستم‌هایی با پردازنده‌های سطح پایین نیز توانایی پردازش این مش‌های ساده شده را دارند.

در علم ریاضیات و مخبرات، معیار نایکوئیست به‌عنوان یک معیار مهم و پرکاربرد در فرآیند نمونه‌برداری به حساب می‌آید. طبق تئوری نایکوئیست می‌توان تعداد مشخصی از نمونه‌ها را از مدل اصلی انتخاب کرده و سپس سیگنال اصلی را توسط نمونه‌های انتخاب شده به درستی بازسازی نمود. در این شرایط، نیازی به محاسبه خطای باقیمانده بین سیگنال بازسازی شده و سیگنال اصلی در هر مرحله از بازسازی نمی‌باشد. زیرا طبق تئوری نایکوئیست، زمانی که نمونه‌ها دو برابر ماکزیمم پهنای باند سیگنال اصلی انتخاب می‌شوند، تعداد کافی از نمونه‌هایی که سیگنال اصلی را بیان می‌کنند در دسترس است. با بررسی سیگنال در حوزه فرکانس می‌توان ارائه دقیق‌تری از جزئیات سیگنال داشت. در صورتی که نمونه‌برداری با توجه به تغییرات فرکانسی در روی سیگنال انجام شود، می‌توان نمونه‌برداری وقتی را برای سیگنال ارائه نمود. با استفاده از نمونه‌برداری وقتی می‌توان در بخش‌هایی از سیگنال که جزئیات بیشتری دارند، نمونه‌های بیشتری انتخاب کرده و برعکس در قسمت‌هایی از سیگنال که جزئیات کمتری را شامل می‌شوند، نمونه‌های کمتری را در نظر گرفت. در صورتی که نمونه‌برداری به صورت یکنواخت در کل مش انجام شود باید با تعداد نمونه‌های بیشتری مدل را ارائه نمود که این امر با اصل مسئله ساده‌سازی جهت ذخیره‌سازی در حافظه‌هایی با حجم پایین‌تر در تناقض می‌باشد. بنابراین، نیاز به انتخاب کمترین تعداد ممکن از نمونه‌هایی است که توانایی بیان ویژگی‌های مهم در سیگنال را داشته باشند. تحت این شرایط در

<sup>۱</sup>Nyquist sampling

مرحله بازیابی سیگنال می‌توان مدلی با کیفیت بالا به دست آورد که ویژگی‌های مهم در سیگنال را نیز شامل می‌شود. این ویژگی‌های مهم شامل جزئیات موجود در سیگنال است که می‌تواند اطلاعات مهمی را در برگیرند.

ساختار مقاله ارائه شده به صورت زیر می‌باشد: در بخش ۲، تحقیقات گذشته در زمینه ساده‌سازی مش مطرح می‌شوند. الگوریتم پیشنهادی به همراه توضیحاتی در مورد تئوری نایکوئیست در بخش ۳ بیان می‌شوند. در بخش ۴، نتایج کیفی و کمی به دست آمده از روش پیشنهادی در مقایسه با روش‌های پرکاربرد در این زمینه نشان داده می‌شوند. در بخش ۵، نتیجه‌گیری کلی مطرح می‌شود.

## ۲- کارهای مرتبط

در سال‌های گذشته، تحقیقات متعددی در زمینه فشرده‌سازی و ساده‌سازی مش مطرح شده است. الگوریتم‌های فشرده‌سازی یا ساده‌سازی با توجه به نوع کاربرد و سیستمی که قابلیت اجرای آن‌ها را دارد، انتخاب می‌شوند. در این مقاله، تمرکز اصلی بر روی مطالبی است که ساده‌سازی مش را در بر دارند. اما هر یک از روش‌های مطرح شده با توجه به کاربرد معرفی شده دارای مزایا و معایبی می‌باشند که در ادامه بیان می‌شوند. به‌طور کلی می‌توان این روش‌ها را به دسته‌های زیر تقسیم‌بندی نمود.

- روش‌های ادغام مناطق و خوشه‌بندی رئوس<sup>۱</sup>
- روش‌های حذفی و کاهش<sup>۲</sup>
- روش‌های موجک چندتایی<sup>۳</sup>
- روش‌های مبتنی بر تصویر<sup>۴</sup>
- روش‌های مبتنی بر شبکه عصبی<sup>۵</sup>

هدف اصلی هر یک از روش‌های بیان شده بر مبنای حفظ ویژگی‌های ظاهری مدل و جزئیات موجود در روی مدل می‌باشد. بسیاری از روش‌های فوق، عملکرد یکسانی داشته و تنها در نوع ساختاری که از طریق آن ساده‌سازی را انجام می‌دهند، متفاوت هستند. این تفاوت ساختاری در اثر انتخاب بخش‌های متفاوت مش مانند راس، لبه یا وجه اتفاق می‌افتد. این انتخاب‌ها با هدف حفظ حفره‌ها یا لبه‌های تیز و تقارن‌های موجود در مش ساده شده در نظر گرفته می‌شوند.

الگوریتم‌های ادغام مناطق، ابتدا با تعیین وجوه هم‌صفحه و ادغام آن‌ها و سپس مثلث‌بندی مجدد، تعداد اجزای مش را کاهش می‌دهند. این نوع از روش‌ها برای ساده‌سازی مش‌هایی که شامل انبوهی از وجوه هم‌صفحه هستند، مناسب‌تر می‌باشند. این نوع از مدل‌ها اکثراً در ساخت سطوح صاف مانند دیوار یا سطح یک کشتی به کار می‌روند. در این روش‌ها، عملیات ادغام تا به دست آمدن خطای معین، ادامه می‌یابد. خطای تعریف شده می‌تواند شاخصی از تغییرات نرمال یا عوامل دیگر [۱، ۲] در نظر گرفته شود. از مزیت‌های این روش‌ها، حفظ ساختار اصلی مدل پس از ساده‌سازی است. در مش‌های بسیار پیچیده، عملیات ویرایش مثلث‌بندی،

<sup>1</sup> Edge contraction and vertex clustering

<sup>2</sup> Decimation

<sup>3</sup> Wavelet based multiresolution

<sup>4</sup> Image-driven

<sup>5</sup> Neural network

زمان‌بر بوده و کارآیی الگوریتم کاهش می‌یابد. در الگوریتم‌های خوشه‌بندی رئوس نیز ابتدا کل مدل توسط توری سه‌بعدی که متشکل از خانه‌های مکعبی شکل است، پوشش داده می‌شود و سپس رئوسی که در خانه مکعبی یکسانی قرار دارند با یک راس جایگزین می‌شوند. روش‌های متفاوتی برای تعیین محل راس جایگزین وجود دارد. جهت تعیین این محل می‌توان از میانگین رئوس، محل مرکز خوشه‌ای که در آن قرار دارند یا کمینه‌سازی یک تابع خطای معین استفاده نمود. ویژگی مهم خوشه‌بندی رئوس این است که می‌توان آن را به هر نوع ورودی از جنس توده نقاط رئوس اعمال نمود. نقطه ضعف اصلی این روش ناتوانی آن در حفظ ساختار اصلی مدل به‌خصوص نگهداری جزئیات موجود در مدل می‌باشد. این روش، توجهی به هندسه محلی مدل نداشته و نمی‌تواند جزئیات فرکانس بالای مدل ساده‌سازی شده را به‌خوبی بیان کند. در برخی تحقیقات دیگر برای بهبود این مسئله از خانه‌های مکعبی وفقی استفاده شده است [۳-۵]. در مطالعات دیگر [۶، ۷] برای افزایش دقت الگوریتم در بیان جزئیات مدل از زاویه بین نرمال‌های هر راس واقع در یک خوشه استفاده می‌شود. در این روش، یک درون‌یابی فضایی داخل مکعب انجام می‌شود تا تعداد خوشه‌های یک مکعب افزایش یابد. زمانی که زاویه نرمال رئوس قرار گرفته داخل یک خوشه از یک حد آستانه معینی کمتر شود، نتیجه مطلوب به‌دست می‌آید. در یک مورد دیگر [۸] با وزن‌دهی اولیه به رئوس، عملیات خوشه‌بندی انجام می‌شود که در نتیجه آن، رئوسی که وزن کمتری به آن‌ها تعلق می‌گیرد در اولویت حذف قرار می‌گیرند.

در روش‌های کاهش رئوس [۹] در هر مرحله یک راس از مش کاسته شده و حفره به‌وجود آمده توسط مش‌بندی مجدد پر می‌شود. برای حذف ترتیبی رئوس یا چگونگی مثلث‌بندی حفره از ویژگی‌های هندسی مدل مانند انحنا و صفحه میانگین به‌دست آمده از رئوس همسایگی استفاده می‌شود. الگوریتم کاهش لبه نیز بر مبنای حذف لبه‌ای از مثلث‌های مش انجام می‌شود. در هر مرحله، لبه‌ای از مثلث حذف شده و لبه حذف شده با یک راس جایگزین می‌شود. راس جایگزین می‌تواند یکی از نقاط انتهایی لبه حذف شده [۱۰، ۱۱] یا نقطه‌ای در مرکز این لبه [۱۲] باشد. روش بهینه برای تعیین محل راس جایگزین، استفاده از خطای صفحات و جوه در همسایگی لبه می‌باشد [۱۳، ۱۴]. زمانی که میزان فاصله‌ی راس جایگزین از تمامی صفحات همسایه مثلثی که لبه آن حذف شده به کمترین مقدار خود برسد، مطلوب‌ترین مکان برای این راس تعیین می‌شود. در مواقعی [۱۵، ۱۶]، خطای ساده‌سازی می‌تواند توسط مجموع وزن‌داری از فواصل مربعی بین منطقه‌ای از مش که لبه آن حذف شده و مش اصلی تعریف شود. کیفیت مش تخمین زده شده می‌تواند با قرار دادن راس جایگزین در محلی که باعث کمینه‌سازی حجم محصور بین مش ساده شده و مش اصلی می‌شود، بهبود یابد. روش کاهش مثلثی نیز به‌طور یک‌جا مثلث مورد نظر را از مش حذف می‌کند. مثلث حذف شده، تنها با یک راس جایگزین می‌شود. در این روش به علت حذف همزمان سه لبه از مش، عملیات ساده‌سازی سریع‌تر از روش کاهش لبه است. در نتیجه این عمل، میزان خطای تخمین نیز بالاتر می‌رود. بنابراین برای عملکرد بهتر سیستم از حذف مثلث‌های هم‌صفحه استفاده شده و هم‌زمان از تولید مثلث‌های باریک دراز جلوگیری به‌عمل می‌آید. برای رسیدن به این هدف [۱۷] از وزن‌دهی به هر مثلث بر اساس انحنا لبه‌ها برای قرار گرفتن در اولویت حذف بهره‌برداری می‌شود.

الگوریتم‌های مبتنی بر تجزیه و یولت [۱۸] به‌طور سلسله‌مراتبی عمل کرده و ضرایب و یولت را برای مش ارائه می‌دهند. در این روش، ابتدا مدل اصلی به تعداد محدودی از مناطق مثلثی تقسیم‌بندی می‌شود و برای هر ناحیه تشکیل یافته، مش ساده‌سازی شده پایه به‌دست می‌آید. پس از آن برای هر بخش تقسیم‌بندی شده می‌توان توسط پایه و یولت انتخابی عملیات پارامتری‌سازی را انجام داد. در آخر، هر مش پایه پارامتری‌سازی شده به‌طور متناوب به زیر بخش‌هایی بر اساس کدبندی و یولت تقسیم‌بندی می‌شود تا مشی

با جزئیات بالا تشکیل شود. این فرآیند تا زمانی که میزان تغییرات بین مش تقسیم‌بندی شده به زیر بخش‌های ریزتر با مش اصلی به کمتر از یک حد آستانه مشخص برسد، ادامه می‌یابد.

الگوریتم‌های مبتنی بر تصویر [۱۹] از افکنش تصویر مدل سه‌بعدی بر روی صفحه از زوایای مختلف استفاده می‌کنند. زمانی که تصویر مدل ساده‌سازی شده با تصویر مدل اصلی که از زاویه یکسان افکنش یافته‌اند، کمترین میزان خطا را داشت، بهترین ساده‌سازی انجام شده است. جهت بررسی این خطا از تفاوت شدت روشنایی افکنش یافته و همپوشانی بین دو تصویر استفاده می‌شود. روش‌های متنوع ذکر شده در فوق مثل روش ادغام لبه می‌توانند برای ساده‌سازی مش مبتنی بر تصویر استفاده شوند. در این نوع از روش‌ها می‌توان بخش‌هایی از مش که اهمیت بالایی دارند را با وزن‌دهی بالاتری بیان نمود تا مانع از ادغام لبه‌های این مناطق شود.

الگوریتم‌های مبتنی بر شبکه عصبی از طریق آموزش شبکه عصبی به وسیله جایگزینی شکل‌های هندسی محلی با شکل‌های ساده‌سازی شده از قبل تعریف شده به ساده‌سازی مدل‌های سه‌بعدی می‌پردازند. از مزیت‌های روش شبکه عصبی نیاز نداشتن به ساده‌سازی کل مدل است. روش ارائه شده در [۲۰] یک روش بدون ناظر خوشه‌بندی است که ساختار محلی مثلث‌ها را یاد گرفته و می‌تواند برای ساده‌سازی مش [۲۱، ۲۲] به کار گرفته شود. این روش متشکل از دو گام اساسی است. گام اول شامل بهینه‌سازی بوده و گام دوم شامل بازسازی می‌باشد. در گام بهینه‌سازی، مجموعه ساده‌سازی شده از رئوس محاسبه می‌شود که بهترین تخمین از مش ورودی را بر اساس معیار خطای تعیین شده ارائه می‌دهد. عملیات تصمیم‌گیری به منظور این که چه رئوسی از مش حذف شوند و تخمین محل جدید رئوس بر مبنای یک مجموعه از قوانینی که طی فرآیند مکرر آموزشی بهینه‌سازی می‌شوند، انجام می‌گیرد. گام بازسازی نیز از اطلاعات موقعیت رئوس جدید به دست آمده از گام بهینه‌سازی و مش اصلی برای تولید وجوه مش ساده شده استفاده می‌کند.

در سال‌های اخیر، تمرکز اصلی بر روی ساده‌سازی مش‌هایی با حجم بسیار بالا از رئوس و وجوه بوده و جهت انجام این کار، همچنان از روش‌های معمول و شناخته شده کلاسیک که در بالا به آن‌ها اشاره شده است، بهره‌برداری می‌شود. ایده اصلی در مقاله‌های اخیر [۲۳، ۲۴] مبتنی بر استفاده از پردازشگرهای موازی جهت تسریع فرآیند ساده‌سازی بوده و از روش شناخته شده ادغام لبه استفاده می‌شود. در تحقیقی دیگر [۲۵]، محققان با هدف ساخت مدل ساده‌سازی شده توسط چاپگرهای<sup>۱</sup> سه‌بعدی از روش کلاسیک ادغام لبه و بهینه‌سازی لبه‌های تولید شده، استفاده می‌کنند. لبه‌های تولید شده باید به نحوی در مدل قرار گیرند که باعث ایستایی مدل چاپ شده شوند. الگوریتم مرجع [۲۶] نیز بر مبنای ادغام لبه بوده و توده نقاط مدل را از یک پویشگر<sup>۲</sup> سه‌بعدی دریافت می‌کند. در این روش پس از ادغام لبه و تعبیه راس جدید در مرکز لبه حذف شده، نیاز به بررسی و ویرایش وجوه ساخته شده جدید می‌باشد. مهم‌ترین محدودیت این روش، عدم پشتیبانی آن از مش‌هایی با ساختار غیر منیفلد<sup>۳</sup> و حفره‌دار است. مرجع [۲۷] نیز به دنبال ساده‌سازی مدل‌های سه‌بعدی به کار رفته در یک ساختمان با هدف حفظ بافت مدل توسط روش ادغام لبه می‌باشد. عملکرد دقیق سیستم نیازمند بخش‌بندی درست اولیه از مدل است. این الگوریتم صرفاً جهت ساده‌سازی مدل‌هایی با ساختار منظم که بخش-بندی دقیقی می‌توان برای آن‌ها محاسبه کرد، مناسب است. در موردی دیگر [۲۸]، ساده‌سازی بر اساس ادغام لبه انجام شده و از

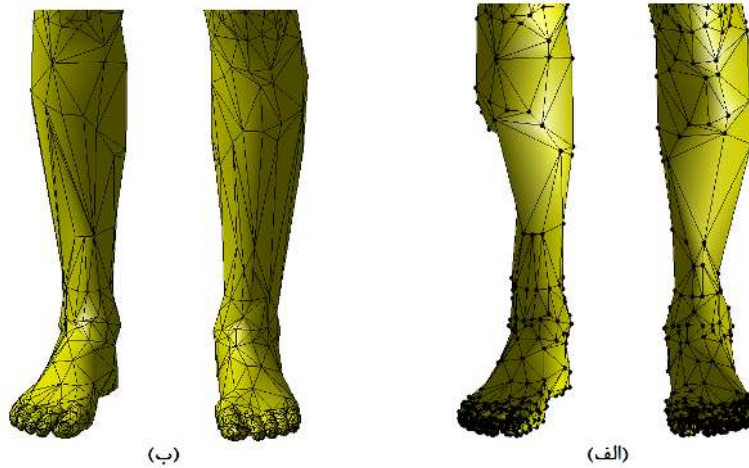
<sup>1</sup> 3d Printer

<sup>2</sup> Scanner

<sup>3</sup> Manifold

طریق گراف‌هایی که توسط ساختار مش به دست می‌آیند، خطاهای حاصل از ادغام لبه کاهش یافته و مدل بهینه‌ای تشکیل داده می‌شود. برای ساخت گراف از بخش‌بندی مدل استفاده می‌شود. وجوه هم سطحی که جهت نرمال یکسانی دارند، به عنوان یک بخش در نظر گرفته می‌شود. دقت این الگوریتم وابسته به گراف‌های ساخته شده بوده و برای ساده‌سازی مدل‌هایی با سطوح هموارتر مانند ساختمان‌ها مناسب می‌باشد. روش فوق برای مدل‌هایی که جهت نرمال برای وجوه تغییرات فراوانی دارد، قابل استفاده نمی‌باشد. در تمامی روش‌های اخیر بیان شده در فوق از روش ادغام لبه مرجع [۱۴] استفاده شده است.

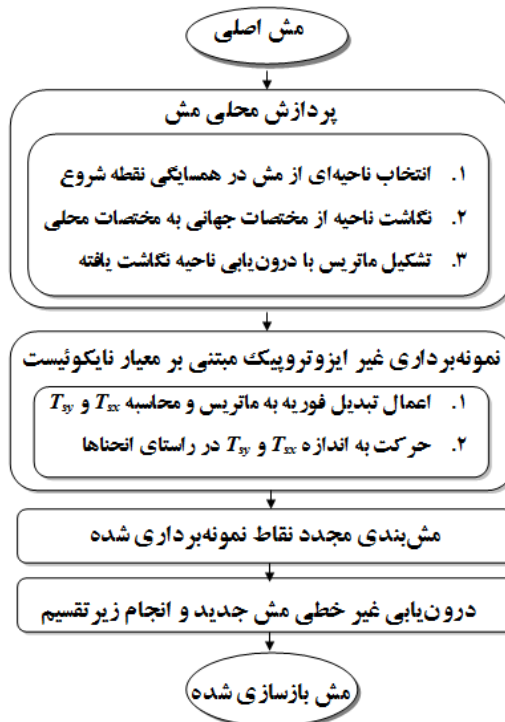
در تحقیق ارائه شده در [۲۹] که بر اساس نمونه‌برداری نایکوئیست به ساده‌سازی مش می‌پردازد از مقادیر انحنای سطح مش جهت نمونه‌برداری یکپارچه برای پیدا کردن محل رئوس نمونه بهره‌برداری می‌کند. در اثر نمونه‌برداری یکپارچه از سطح مش، بسیاری از مناطق بر روی رویه مورد بررسی قرار نمی‌گیرند. این مسئله به دلیل برجسب‌گذاری نمونه‌های انتخابی در هر مرحله از پیش‌روی الگوریتم به وجود می‌آید. هدف از برجسب‌گذاری نمونه‌ها، جلوگیری از انتخاب نمونه‌های تکراری و همچنین حذف عملیات جستجو در مسیرهای بررسی شده است. اما به علت ساختار هندسی بسیاری از مدل‌ها در اثر برجسب‌گذاری نمونه‌ها، یک‌سری نواحی در سطح مش تشکیل می‌شوند که توسط نمونه‌های برجسب‌گذاری شده احاطه شده‌اند و امکان بررسی نمونه‌های داخل این نواحی وجود ندارد. تحت این شرایط، نمونه‌هایی که در داخل این نواحی قرار دارند از لیست بررسی حذف شده و فقط نمونه‌های مرزی آن‌ها انتخاب می‌شوند. در صورتی که در زمان نمونه‌برداری، منطقه‌ای از سطح مش مورد بررسی قرار نگیرد در مرحله مش‌بندی مجدد، فرورفتگی‌هایی در سطح مش بازسازی شده ایجاد می‌شوند. بنابراین در اثر حذف شدن این مناطق نمی‌توان مش‌بندی درست و دقیقی برای مش ساده‌سازی شده ارائه کرد. برای حل این مشکل در روش [۲۹] از یک گام اضافی در فرآیند الگوریتم استفاده می‌شود. گام مورد نظر پس از مش‌بندی اولیه نمونه‌های انتخابی به مراحل الگوریتم اضافه می‌شود. این گام با چرخش لبه‌های وجوه مش بازسازی شده و ویرایش مش‌بندی اولیه به اصلاح فرورفتگی‌ها در مناطقی می‌پردازد که در آن‌ها هیچ نمونه‌ای انتخاب نشده است. افزودن این گام باعث افزایش پیچیدگی محاسباتی شده و نمی‌توان آن را به عنوان یک روش بهینه برای حل مشکل در نظر گرفت. برای درک بهتر مسئله، یک مدل ساده‌سازی شده توسط روش [۲۹] در شکل ۱ نشان داده می‌شود. در مقاله ارائه شده به دنبال راهکاری برای حذف این گام از مراحل الگوریتم هستیم. همچنین در مقاله پیش‌رو به جای استفاده از مقادیر انحنای سطح جهت نمونه‌برداری، مستقیماً از مقادیر پهنای باند در حوزه فرکانس برای نمونه‌برداری استفاده می‌شود. در روش پیشنهادی با پردازش محلی مش و نمونه‌برداری محلی می‌توان تمام سطح مش را با دقت بالا پوشش نمود تا هیچ منطقه‌ای بدون نمونه انتخابی رها نشود. با توجه به پردازش محلی مش، تمامی مناطق در همسایگی هر نمونه انتخابی، مورد بررسی واقع شده و در نتیجه این عمل، فرورفتگی و برجستگی‌های نادرست در سطح مش تولید نمی‌شوند. همچنین در الگوریتم پیشنهادی از روش جدیدی برای درون‌یابی مش ساده‌سازی شده بهره‌برداری می‌شود تا پیچیدگی‌های محاسباتی روش درون‌یابی ارائه شده در تحقیق [۲۹] را حذف نمود. علاوه بر این در روش قبلی نیاز بود تا کاربر، یک مقدار آستانه خطا برای حذف اعوجاج‌های به دست آمده از روش درون‌یابی در نظر بگیرد. اما در روش فعلی نیازی به تعیین هیچ مقدار آستانه‌ای برای بهبود کیفیت مدل بازسازی شده نمی‌باشد. بنابراین، روش فعلی وابسته به پارامتر نبوده و ایرادات روش قبلی را ندارد.



شکل ۱. مدل ساده‌سازی شده توسط روش [۲۹]. (الف) مش‌بندی اولیه نمونه‌های انتخابی. رئوس این مش‌بندی بیانگر نمونه‌های انتخابی هستند. عدم نمونه‌برداری از برخی مناطق باعث شده است که در ساختار مدل ساده‌سازی شده، اعوجاج‌هایی به وجود آیند. (ب) ویرایش مش‌بندی اولیه. با افزودن گام ویرایش مش‌بندی، فرورفتگی‌های موجود در سطح مدل ساده‌سازی شده، اصلاح یافته و ساختار مدل دارای سطحی صاف‌تر بدون فرورفتگی و برجستگی‌های نامنظم است.

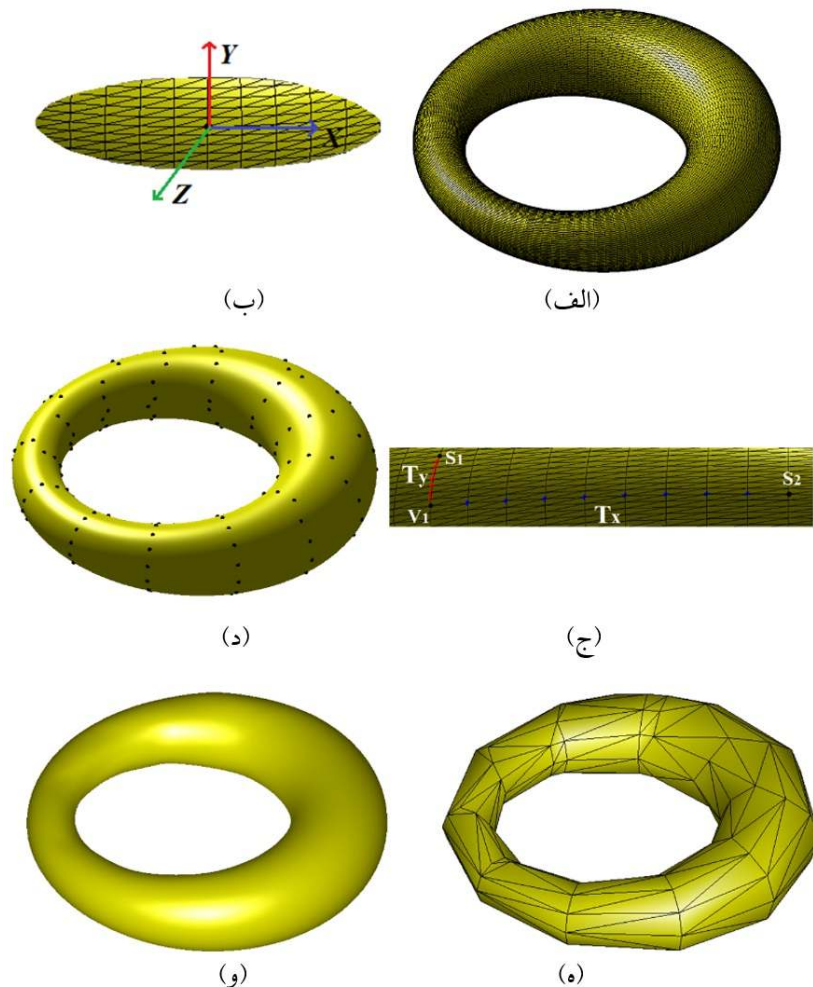
### ۳- روش پیشنهادی

در مقاله حاضر، با توجه به اهمیت مسئله ساده‌سازی مش، روشی برای کاهش تعداد رئوس و وجوه مدل اصلی ارائه می‌شود. جهت رسیدن به این هدف از معیار نمونه‌برداری نایکوئیست استفاده می‌شود. این معیار به صورت محلی به قسمت‌های مختلف مش اعمال شده و نمونه‌برداری انجام می‌شود. مراحل الگوریتم پیشنهادی در شکل ۲ و مراحل تصویری آن در شکل ۳ به ترتیب نشان داده می‌شوند. در ادامه این بخش، جزئیات مربوط به هر گام از الگوریتم بیشتر توضیح داده می‌شود.



شکل ۲. مراحل الگوریتم پیشنهادی.





شکل ۳. مراحل تصویری الگوریتم پیشنهادی. (الف) مدل اصلی. (ب) تعیین بخشی از مش و انتقال آن از مختصات جهانی به مختصات محلی. (ج) نمونه‌برداری با معیار نایکوئیست،  $T_x = I/f_{sx}$ ،  $T_y = I/f_{sy}$ ،  $S_1$  و  $S_2$  نمونه‌های انتخاب شده با فاصله  $T_x$  و  $T_y$  از محل نمونه اول در راس  $V_1$ . (د) مدل نمونه‌برداری شده. (ه) مدل مثلث‌بندی شده. (و) مدل بازسازی شده نهایی که از اعمال درون‌یابی با روش چند جمله‌ای به مدل مثلث‌بندی شده حاصل می‌شود.

### ۳-۱- پردازش محلی مش

با توجه به این که هدف اصلی الگوریتم پیشنهادی، بازسازی جزئیات و حفظ شکل اصلی مدل پس از اعمال ساده‌سازی است، نیاز به بهره‌برداری از ویژگی‌های هندسی و ذاتی مدل می‌باشد. با استفاده از ویژگی‌های هندسی مدل می‌توان دقت نمونه‌برداری را بالا برد. انحنا یک سطح، به عنوان یکی از مهم‌ترین ویژگی‌های هندسی مدل سه‌بعدی در نظر گرفته می‌شود. در صورتی که راستاهای مربوط به کمینه و بیشینه انحنا در طی فرآیند نمونه‌برداری حفظ شوند، می‌توان پس از اعمال ساده‌سازی همچنان شکل اصلی مدل را بازسازی کرد. زیرا جهت بردارهای کمینه و بیشینه انحنا بیانگر لبه‌های اصلی در سطح مدل سه‌بعدی می‌باشند. بنابراین، سعی بر این است که نمونه‌برداری اعمال شده در جهت‌های مربوط به بردارهای کمینه و بیشینه انحنا در روی سطح مدل پیش‌روی نماید تا نمونه‌ها در راستای این بردارها انتخاب شوند. تحت این شرایط، محل نمونه‌های انتخابی به عنوان معیاری از اطلاعات مربوط به مسیرهای مهم در نظر گرفته می‌شود. همچنین با تراکم نمونه‌های انتخابی که توسط اعمال تبدیل فوریه<sup>۱</sup> به دست می‌آید می‌توان به جزئیات پراکنده شده در سطح مش پی برد. با ترکیب این دو معیار (استفاده از تبدیل فوریه برای انتخاب نمونه و حرکت در مسیرهای کمینه و بیشینه انحنا) می‌توان دقت و کارایی الگوریتم را بهبود بخشید و جزئیات موجود در روی سطح را به همراه جزئیات و شکل

<sup>1</sup> Fourier transform

اصلی مدل، دوباره بازسازی نمود. مدل سه بعدی به صورت یک تابع ضمنی<sup>۱</sup> در فضای سه بعدی بیان می شود که نمی توان تبدیل فوریه را مستقیماً به روی آن اعمال نمود. در یک رویه ضمنی  $(F(x, y, z) = 0)$  به دلیل عدم امکان تعریف یک تابع صریح<sup>۲</sup> کلی برای تمام رویه نمی توان تبدیل فوریه دوبعدی را به کل رویه اعمال نمود. برای حل این مشکل باید رویه را به نواحی مختلفی بخش بندی نمود به طوری که بتوان برای هر ناحیه کوچک بخش بندی شده، یک تابع صریح تعریف نمود. تحت این شرایط می توان برای هر تابع صریح تعریف شده، تبدیل فوریه را اعمال نمود. در این مقاله، به منظور حفظ ویژگی های هندسی مدل از تعریف تابع صریح بر اساس بردارهای کمینه و بیشینه انحنا استفاده می شود. هر بخش که به صورت تابع صریح بیان می شود مانند یک سیگنال دوبعدی بوده و قوانین تبدیل فوریه دوبعدی در مورد این بخش ها برقرار می باشد.

با توجه به شرایط مطرح شده در تحقیقات [۳۰، ۳۱] می توان سیگنال های غیرمتناوب را توسط تعداد محدودی از نمونه های به دست آمده از سیگنال باند محدود در فضای طیفی بازسازی نمود. با توجه به این که ویژگی های طیفی مش در ناحیه های مختلف متفاوت است، لازم است برای استخراج این ویژگی ها از تبدیل فوریه در نواحی مکانی کوچک استفاده نمود. این شیوه در بررسی طیفی سیگنال های صوتی هم مورد استفاده قرار می گیرد که در آن با توجه به تغییرات ویژگی های طیفی سیگنال در طول زمان برای استخراج این ویژگی ها به جای تبدیل فوریه معمولی از تبدیل فوریه زمان کوتاه استفاده می شود. برای به دست آوردن طیف فرکانسی مش سه بعدی لازم است یک تابع صریح از مش در ناحیه مورد پردازش ایجاد شود. برای این منظور در روش پیشنهادی از یک بیان محلی برای مش استفاده می شود که در آن سیستم مختصات محلی طوری انتخاب می شود که بتوان  $Z$  را به صورت یک تابع صریح از  $X$  و  $Y$  در آورد. برای رسیدن به این هدف، کافی است محورهای  $X$  و  $Y$  را در راستای انحناهای کمینه و بیشینه انتخاب نموده و محور  $Z$  را از ضرب خارجی این دو محور به دست آورد. در این شرایط می توان تغییرات مش را در یک محدوده همسایگی مناسب به صورت یک تابع صریح در سیستم مختصات محلی بیان نمود. جهت نمونه برداری، ابتدا راسی از مش که نمونه برداری در همسایگی آن انجام خواهد شد، انتخاب شده و سپس همسایگی های مرتبه اول تا سوم راس به عنوان محدوده همسایگی در نظر گرفته می شوند. برای به دست آوردن راستاهای انحناهای کمینه و بیشینه می توان از خواص انحناها در سطح مدل سه بعدی استفاده نمود. طبق مطالب ارائه شده در تحقیق [۳۲] می توان ویژگی های محلی یک سطح سه بعدی را توسط تانسور انحنا<sup>۳</sup> بیان نمود. مقادیر ویژه این تانسور، مقادیر بیشترین انحنا و کمترین انحنا را مشخص کرده و بردارهای ویژه متناظر آن ها به ترتیب بردارهای بیشینه انحنا و کمینه انحنا را بیان می کنند. با توجه به تئوری اویلر مطرح شده در مورد انحناهای مدل سه بعدی می توان این ادعا را مطرح نمود که جهت های انحناهای بیشینه و کمینه همواره بر همدیگر عمود هستند. با استفاده از رابطه (۱) می توان رئوس موجود در محدوده انتخاب شده را از مختصات جهانی به مختصات محلی انتقال داد [۳۳].

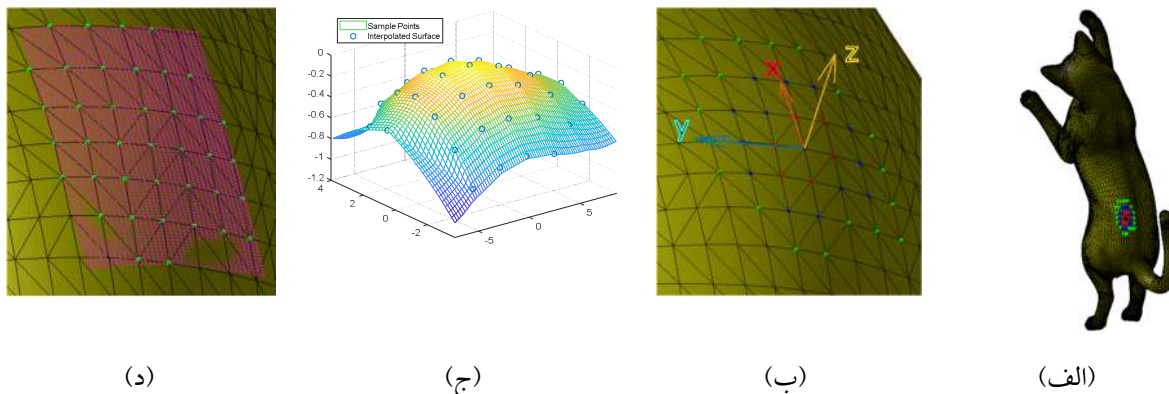
$$\begin{bmatrix} X^L \\ Y^L \\ Z^L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{Xaxis}^W & X_{Yaxis}^W & X_{Zaxis}^W \\ Y_{Xaxis}^W & Y_{Yaxis}^W & Y_{Zaxis}^W \\ Z_{Xaxis}^W & Z_{Yaxis}^W & Z_{Zaxis}^W \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X^W \\ Y^W \\ Z^W \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} X_{V_1}^W \\ Y_{V_1}^W \\ Z_{V_1}^W \end{bmatrix} \quad (1)$$

<sup>1</sup> Implicit function

<sup>2</sup> Explicit function

<sup>3</sup> Curvature tensor

در رابطه (۱)،  $R$  ماتریس چرخش بوده که ستون‌های آن شامل محورهای مختصات محلی است که به صورت بردار سه‌بعدی در سیستم مختصات جهانی بیان می‌شود. در این ماتریس، اندیس  $W$  بیانگر مختصات جهانی می‌باشد.  $T$  بردار انتقال بوده و مولفه‌های آن در واقع بیانگر فاصله مبدا سیستم مختصات محلی یعنی  $V_1$  از مبدا سیستم مختصات جهانی است که به صورت یک بردار سه‌بعدی نوشته می‌شود.  $X^L$  و  $X^W$  به ترتیب مختصات رئوس در سیستم جهانی و محلی را بیان می‌کنند. برای درک بهتر مطلب، شکل ۴ ارائه می‌شود. در قسمت (الف) شکل ۴، مدل اصلی به همراه ناحیه انتخاب شده با همسایگی مرتبه سوم راس مورد آزمایش نشان داده شده است. در قسمت (ب) ناحیه انتخابی در سیستم مختصات محلی نمایش داده می‌شود.



شکل ۴. پردازش محلی بخش انتخاب شده. (الف) مدل اصلی و بخش محلی انتخاب شده. (ب) مختصات محلی. (ج) درون‌یابی یک تابع دوبعدی از روی نقاط نمونه. (د) درون‌یابی رویه از تابع صریح برای ناحیه انتخابی به صورت یک ناحیه مستطیلی (نقاط درون‌یابی شده با رنگ بنفش نشان داده شده است که در آن بعضی از نقاط بدلیل واقع شدن در قسمت پائین رویه دیده نمی‌شوند).

در روش پیشنهادی، به منظور استفاده از نمونه‌برداری بر اساس معیار نایکوئیست، نیاز به محاسبه‌ی تبدیل فوریه از بخش انتخاب شده می‌باشد. ولی جهت بهره‌برداری از تبدیل فوریه دوبعدی باید بتوان سطح انتخاب شده از مدل را به صورت یک ماتریس دوبعدی بیان نمود. با توجه به این که رئوس مش به صورت یک سری نقاط پراکنده هستند و رویه را به صورت یک ماتریس بیان نمی‌کنند، لازم است با استفاده از خواص درون‌یابی، مختصات رئوس جدید را بر روی مش به دست آورد تا بتوان به یک بیان ماتریسی از رویه دست یافت. برای دستیابی به این هدف از بیان تابع صریح استفاده می‌شود. توسط یک تابع صریح می‌توان مختصات رئوس موجود در ناحیه انتخابی را که شامل مولفه‌های  $(X, Y, Z)$  می‌باشند به صورت  $Z = f(X, Y)$  در سیستم مختصات محلی بیان نموده و مولفه  $Z$  را به صورت تابعی از مولفه‌های  $X$  و  $Y$  در نظر گرفت. حال با داشتن مختصات  $X, Y$  و  $Z$  برای رئوس واقع در ناحیه انتخابی می‌توان با استفاده از درون‌یابی، مختصات سایر نقاط را درون ناحیه به دست آورد. بدین ترتیب یک ماتریس برای بیان رویه در ناحیه انتخابی ایجاد می‌شود که می‌توان از آن برای گرفتن تبدیل فوریه دوبعدی استفاده نمود. قسمت (د) در شکل ۴، ماتریس مورد نظر را با توجه به مختصات رئوس ناحیه انتخابی در سیستم مختصات محلی نشان می‌دهد.

### ۳-۲- نمونه‌برداری غیرایزوتروپیک مبتنی بر معیار نایکوئیست

پس از بیان صریح تابع و درون‌یابی مقادیر به دست آمده، می‌توان با استفاده از تبدیل فوریه و انتقال سیگنال به حوزه فرکانس، پهنای باند بخش انتخاب شده را مورد بررسی قرار داد. برای محاسبه تبدیل فوریه یک سیگنال دوبعدی پیوسته از رابطه زیر استفاده می‌شود:

$$F(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-j2\pi(ux+vy)} dx dy \quad (2)$$

در رابطه فوق،  $F(u, v)$  تبدیل فوریه سیگنال دوبعدی  $f(x, y)$  بوده و نیز  $u$  و  $v$  به ترتیب بیانگر فرکانس‌های  $f_x$  و  $f_y$  در جهت‌های  $X$  و  $Y$  می‌باشند. با مشخص بودن پهنای باند ناحیه انتخابی و در نظر گرفتن معیار نایکوئیست می‌توان عمل نمونه‌برداری از مدل را به‌درستی انجام داد. مطابق با قضیه نایکوئیست در صورتی که فرکانس نمونه‌برداری بزرگتر یا مساوی دو برابر بیشینه فرکانس موجود در سیگنال در نظر گرفته شود، می‌توان سیگنال اصلی را بازسازی نمود. در الگوریتم پیشنهادی با توجه به بیشینه فرکانس به‌دست آمده برای دو راستای  $X$  و  $Y$  در ناحیه انتخابی و در نظر گرفتن قضیه نایکوئیست، مطابق رابطه (۳) می‌توان فرکانس نمونه‌برداری را برای محدوده ناحیه انتخابی در دو راستای  $X$  و  $Y$  تعیین کرد.

$$f_{sx} = \frac{1}{T_{sx}} \geq 2f_{x\max} \quad f_{sy} = \frac{1}{T_{sy}} \geq 2f_{y\max} \quad (3)$$

پس از به‌دست آوردن مقادیر  $T_{sx}$  و  $T_{sy}$  می‌توان محل نمونه جدید را مشخص نمود. جهت انجام نمونه‌برداری، نقطه شروع همان نقطه راس مبدا  $V_1$  در نظر گرفته شده و حرکت به اندازه  $T_{sx}$  و  $T_{sy}$  در دو جهت جداگانه به ترتیب در دو راستای کمینه انحنا و بیشینه انحنا انجام می‌شود. نزدیکترین رئوس به مناطق به‌دست آمده، به‌عنوان رئوس نمونه‌برداری شده  $V_{s1}$  و  $V_{s2}$  در نظر گرفته می‌شوند. به همین ترتیب، نمونه‌برداری از محل رئوس  $V_{s1}$  و  $V_{s2}$  به‌صورت جداگانه ادامه می‌یابد تا این‌که نمونه‌برداری از قطعه انتخابی به‌طور کامل انجام شود. سپس نمونه‌برداری از بخش‌های موجود در همسایگی قطعه فعلی ادامه می‌یابد. الگوریتم نمونه‌برداری به تمامی بخش‌های مدل اعمال شده و فرآیند نمونه‌برداری تکمیل می‌شود. لازم به توضیح است که روش پیشنهادی با توجه به انتخاب وقتی نقاط نمونه در راستای محورهای  $X$  و  $Y$  متناسب با پهنای باند در هر راستا در واقع نوعی نمونه‌برداری غیرایزوتروپیک می‌باشد که امکان بازسازی مدل سه‌بعدی را با تعداد نمونه‌های کمتر میسر می‌سازد.

### ۳-۳- مش‌بندی مجدد نقاط نمونه‌برداری شده

پس از نمونه‌برداری کامل از مدل سه‌بعدی، مش‌بندی جدیدی با اتصالاتی متفاوت از مش اصلی برای نقاط نمونه‌برداری شده تولید می‌شود. جهت مثلث‌بندی توده نقاط نمونه‌برداری شده، از روش ارائه شده در تحقیق [۳۴، ۳۵] استفاده می‌شود. در این تحقیق، روش رشد کانتور<sup>۱</sup> به کار گرفته می‌شود تا مرز بین نمونه‌ها را جداسازی نماید. در محل هر دو نمونه انتخاب شده از بردار نمونه‌ها، کانتوری رشد داده شده و محل تقاطع این دو کانتور به‌عنوان لبه یک مثلث در نظر گرفته می‌شود. نمونه‌های انتخاب شده نیز محل رئوس مش جدید را تعیین می‌کنند. مش جدید تشکیل شده، یک مدل ساده‌سازی شده با مثلث‌بندی درشت را ارائه می‌دهد. در شکل ۵، مدلی از یک قوری نشان داده می‌شود. با اعمال الگوریتم پیشنهادی به این مدل می‌توان ۱۳۳۱ نمونه را از بین ۹۹۹۸ راس موجود در مدل اصلی انتخاب نمود. توسط مثلث‌بندی فوق، مدلی با ۲۶۶۳ وجه حاصل می‌شود که دارای مثلث‌بندی درشت می‌باشد. مدل به‌دست آمده نمی‌تواند مدلی با کیفیت بالا را نمایش دهد.

<sup>1</sup> Contour growing

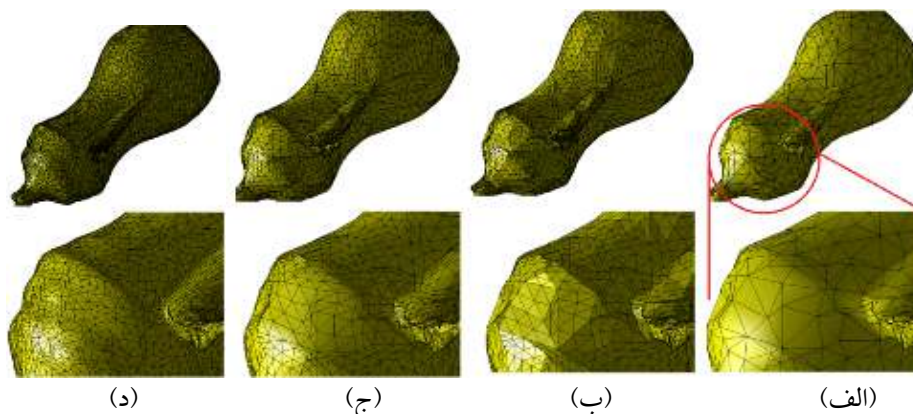
مدل اصلی	مدل نمونه‌برداری شده	مدل مش‌بندی شده مجدد
تعداد رئوس: ۹۹۹۸، تعداد وجوه: ۲۰۰۰۰	تعداد نمونه‌ها: ۱۳۳۱	تعداد رئوس: ۱۳۳۱، تعداد وجوه: ۲۶۶۳



شکل ۵. مش‌بندی مجدد برای نقاط نمونه‌برداری شده.

### ۳-۴- درون‌یابی غیرخطی مش جدید و انجام زیر تقسیم

جهت تخمین مدل با کیفیت بالاتر، نیاز به درون‌یابی مدل مش‌بندی شده جدید است. از طریق الگوریتم درون‌یابی می‌توان جزئیات حذف شده از مدل مانند انحناها و حفره‌ها را با دقت بالاتری تخمین زد. برای رسیدن به این هدف، ابتدا باید مثلث‌های درشت‌تر به مثلث‌های ریزتر تقسیم شوند. این تقسیم‌بندی با پیدا کردن مرکز لبه‌های هر مثلث و اتصال این مراکز به یکدیگر حاصل می‌شود. در صورتی که صرفاً از درون‌یابی خطی استفاده شود، نمی‌توان انحناها و تفره‌های مدل را به‌درستی بازسازی نمود. با توجه به این که هر یک از ریز مثلث‌ها بر روی صفحات مثلث‌های درشت مربوط به خود قرار می‌گیرند، اطلاعاتی خارج از این صفحه را شامل نمی‌شوند. جهت پوشش برجستگی‌ها و فرورفتگی‌های مدل از افکنش محلی ریز مثلث‌های موجود در یک صفحه به فضا استفاده می‌شود. با افکنش محلی رئوس مثلث‌های ریز یک صفحه بر روی یک تابع چند جمله‌ای غیرخطی درجه دو می‌توان انحناهای مدل را با دقت بالاتری بازسازی نمود. در شکل ۶، مدل اصلی، مدل مش‌بندی شده مجدد، و مدل‌های حاصل از اعمال درون‌یابی خطی و غیرخطی به مدل مش‌بندی شده یک قوری نمایش داده می‌شوند. در این شکل، تصاویر از زاویه‌ای که تفاوت‌های دو روش را بهتر بیان می‌کند، انتخاب شده‌اند. همان‌طور که مشاهده می‌شود، روش درون‌یابی غیرخطی، مدلی هموارتر نسبت به روش درون‌یابی خطی تولید می‌کند. برای نشان دادن دقیق‌تر انحناهای مدل، قسمتی از مدل در سطر دوم با نمایی بزرگتر نمایش داده می‌شود.




شکل ۶. درون‌یابی مدل مش‌بندی شده. (الف) مدل اصلی. (ب) مدل مش‌بندی حاصل از نمونه‌برداری. (ج) مدل حاصل از درون‌یابی خطی. (د) مدل حاصل از درون‌یابی غیرخطی. تفاوت‌های شدت نور انعکاس یافته از مثلث‌ها بیانگر تحدب و تفره روی مدل بازسازی شده هستند.

## ۴- ارزیابی نتایج

الگوریتم پیشنهادی بر روی مدل‌های سه‌بعدی با جزئیات متنوع اعمال شده و نتایج حاصل به صورت کمی و کیفی نمایش داده می‌شوند. در شکل ۷، مدل‌های ساده‌سازی شده و مثلث‌بندی شده مربوط به سگ، گوریل، اسب و گربه نشان داده می‌شوند. در بخش‌هایی با جزئیات بالا مانند صورت، دست و پا تراکم نقاط بیشتر از بخش‌های هموار مدل‌ها می‌باشد.

تعداد رئوس: ۴۲۴۱	تعداد رئوس: ۴۱۶۲	تعداد رئوس: ۳۶۳۸	تعداد رئوس: ۴۹۷۲
تعداد وجوه: ۸۹۴۶	تعداد وجوه: ۷۸۵۶	تعداد وجوه: ۶۹۳۴	تعداد وجوه: ۹۱۱۸



شکل ۷. مدل نمونه‌برداری شده و مثلث‌بندی شده مربوط به مدل‌های سگ، گوریل، اسب و گربه. با توجه به جزئیات فراوان موجود در پنجه، سم، دست، پا و صورت مدل‌ها، میزان تراکم نقاط نمونه‌برداری شده در این بخش‌ها زیادتر است.

### ۴-۱- محاسبه خطا

در این مقاله، جهت بررسی کیفیت مدل ساده‌سازی شده و محاسبه میزان شباهت آن به مدل اصلی از روش خطای ارائه شده در [۳۶] استفاده می‌شود. نتایج این خطا مطابق با ارزیابی بصری انسان بوده و برخلاف خطای هاسدورف<sup>۱</sup> [۳۷] فقط با معیار نزدیکی رئوس مش اصلی و ساده‌سازی شده به بررسی شباهت بین دو مدل نمی‌پردازد. ویژگی بارز این خطا، بررسی محلی انحنا مجاور رئوس و در نتیجه ارزیابی دقیق جزئیات موجود در مدل است.

ارزیابی خطای به کار گرفته شده بر اساس مشخصات آماری انحنا رئوس است. در این الگوریتم پس از به دست آوردن رئوس متناظر بین مش اصلی و مش ساده‌سازی شده، میزان انحنا برای هر راس محاسبه می‌شود. سپس در همسایگی هر راس، کره‌ای به شعاع  $a$  در نظر گرفته می‌شود. توسط شعاع‌های متفاوت این کره می‌توان همسایگی‌های متفاوتی برای هر راس در نظر گرفت. برای رئوس قرار گرفته در محدوده این کره، مقادیر میانگین گوسی وزن‌دار، انحراف معیار گوسی وزن‌دار و کواریانس به ترتیب

<sup>۱</sup> Hausdorff Error

محاسبه می‌شوند. این محاسبات به ازای شعاع‌های متفاوتی از کره انجام شده و در نهایت، میزان شباهت نهایی با مجموع این نتایج به‌دست می‌آید. در ادامه، روابط مربوط به مقادیر میانگین گوسی وزن‌دار ( $\mu$ )، انحراف معیار گوسی وزن‌دار ( $\sigma$ ) و کواریانس ( $\sigma_{\bar{v}}$ ) به ترتیب بیان می‌شوند.

$$\begin{aligned} \mu_v^a &= \sum_{v_i \in N(v, a)} \omega_v^a(v_i) \kappa(v_i), & \mu_{\bar{v}}^a &= \sum_{v_i \in N(v, a)} \omega_{\bar{v}}^a(\bar{v}_i) \kappa(\bar{v}_i) \\ \sigma_v^a &= \sqrt{\sum_{v_i \in N(v, a)} \omega_v^a(v_i) (\kappa(v_i) - \mu_v^a)^2}, & \sigma_{\bar{v}}^a &= \sqrt{\sum_{v_i \in N(v, a)} \omega_{\bar{v}}^a(\bar{v}_i) (\kappa(\bar{v}_i) - \mu_{\bar{v}}^a)^2} \\ \sigma_{v\bar{v}}^a &= \sum_{v_i \in N(v, a)} \omega_v^a(v_i) (\kappa(v_i) - \mu_v^a) (\kappa(\bar{v}_i) - \mu_{\bar{v}}^a) \\ w_v^a(v_i) &= \frac{e^{-2\|v_i - v\|^2/a^2}}{\sum_{v_j \in N(v, a)} e^{-2\|v_j - v\|^2/a^2}} \end{aligned} \quad (4)$$

در روابط فوق،  $v_i$  بیانگر راس  $i$  در مش اصلی بوده و  $\bar{v}_i$  راس متناظر  $i$  ام در مش ساده‌سازی شده می‌باشد. همچنین  $K(v)$  بیانگر انحنا در محل راس  $v$  بوده، و  $\omega_v^a(v_i)$  تابع وزن‌دار گوسی در محل راس  $v$  با انحراف معیار  $a/2$  برای کره‌ای با شعاع  $a$  در نظر گرفته می‌شود. نتایج حاصل از رابطه (۴)، تفاوت‌های آماری مش اصلی و ساده‌سازی شده را بیان می‌کنند که جهت محاسبه خطا در روابط زیر مورد استفاده قرار می‌گیرند.

$$M^a(v) = \frac{\|\mu_v^a - \mu_{\bar{v}}^a\|}{\max(\mu_v^a, \mu_{\bar{v}}^a) + C}, \quad Sd^a(v) = \frac{\|\sigma_v^a - \sigma_{\bar{v}}^a\|}{\max(\sigma_v^a, \sigma_{\bar{v}}^a) + C}, \quad Co^a(v) = \frac{\|\sigma_v^a \sigma_{\bar{v}}^a - \sigma_{v\bar{v}}^a\|}{\sigma_v^a \sigma_{\bar{v}}^a + C} \quad (5)$$

خطای محلی برای هر راس با مجموع وزن‌دار مولفه‌های به‌دست آمده از رابطه (۵) محاسبه می‌شود.

$$LE^a(v) = \frac{\alpha M^a(v) + \beta Sd^a(v) + \gamma Co^a(v)}{\alpha + \beta + \gamma}, \quad \alpha = 1, \beta = 1, \gamma = 0.5 \quad (6)$$

با استفاده از رابطه زیر، مجموع خطای مربوط به شعاع‌های مختلف کره محاسبه می‌شود. در رابطه زیر،  $n$  تعداد دفعاتی است که شعاع متفاوتی برای کره در نظر گرفته می‌شود.

$$MLE(v) = \frac{\sum_{i=1}^n LE^{a_i}(v)}{n} \quad (7)$$

در نهایت، خطای کل با رابطه زیر حاصل می‌شود.

$$GME_{M_d \rightarrow M_r} = \left( \frac{1}{|M_d|} \sum_{v \in M_d} MLE(v)^p \right)^{\frac{1}{p}}, p = 3 \quad (8)$$

در رابطه فوق،  $M_d$  بیانگر مش ساده‌سازی شده بوده و  $M_r$  بیانگر مش مرجع است.

#### ۴-۲- مقایسه الگوریتم پیشنهادی با روش‌های دیگر

در ادامه، نتایج عددی و کیفی الگوریتم پیشنهادی با روش‌های شناخته شده و پرکاربرد در نرم‌افزارهای سه‌بعدی مقایسه می‌شود. مهم‌ترین روشی که امروزه مورد توجه بسیاری از محققین است، الگوریتم شاخص ارائه شده در مرجع [۱۴] می‌باشد. روش مذکور، مبتنی بر ادغام لبه بوده و پس از حذف دو راس انتهایی لبه، محلی برای جایگزینی راس جدید به دست می‌آورد. برای محاسبه محل راس جدید از صفحاتی که از وجوه مجاور دو راس انتهایی لبه ادغام شده عبور می‌کنند، استفاده می‌شود. مکانی روی مش که کمترین فاصله از تمامی صفحات تعریف شده را داشته باشد، به عنوان محل راس جدید انتخاب می‌شود. نتایج مقایسه عددی الگوریتم پیشنهادی و روش مذکور در جدول ۱ و نتایج کیفی در شکل‌های ۸ و ۹ به ترتیب برای مدل‌هایی با پیکربندی انسان و گوریل نشان داده می‌شوند.

همان‌طور که مشاهده می‌شود، الگوریتم پیشنهادی در بازسازی مدل‌هایی با جزئیات ریزتر می‌تواند نسبت به مرجع [۱۴] موفق‌تر عمل نماید. روش [۱۴] توانایی بازسازی دقیق جزئیات ریز مدل را ندارد. فاصله راس جدید از تمامی صفحات مربوط به وجوه مجاور با وزن یکسانی اندازه‌گیری شده و نهایتاً مجموع این فواصل در نظر گرفته می‌شود. در نتیجه این عمل، اثرات مربوط به صفحات ناشی از وجوهی که بیانگر جزئیات هستند، خنثی می‌شود.

الگوریتم دیگری که با روش پیشنهادی مقایسه می‌شود، تحقیق ارائه شده در مرجع [۳۵] می‌باشد. در این روش، ابتدا نمونه‌هایی از روی مش انتخاب شده و سپس نقاط نمونه‌برداری شده، مش‌بندی می‌شوند. نمونه‌های این الگوریتم بر مبنای بیشترین فاصله ژئودزیک<sup>۱</sup> نسبت به همدیگر انتخاب می‌شوند. در تحقیق [۳۵]، یک روش نمونه‌برداری یکسان و یک روش نمونه‌برداری وقتی برای انتخاب نمونه‌ها بیان شده است. در روش نمونه‌برداری یکسان، ابتدا راسی تصادفی از روی مش به عنوان نمونه اول تعیین شده، سپس نمونه دوم طوری انتخاب می‌شود که نسبت به نمونه اول بیشترین فاصله ژئودزیک را داشته باشد. نمونه سوم نیز راسی خواهد بود که بیشترین فاصله ژئودزیک را نسبت به دو نمونه انتخابی قبلی داشته باشد. این عملیات برای تعداد مشخصی از نمونه‌ها که کاربر آن را تعیین می‌کند، ادامه می‌یابد. در روش نمونه‌برداری وقتی از مقادیر میانگین انحنا رئوس برای انتخاب نمونه‌ها استفاده می‌شود. در واقع، افزایش یا کاهش میانگین دلیلی برای افزایش یا کاهش تعداد نمونه‌های انتخابی می‌باشد. نتایج مقایسه عددی الگوریتم پیشنهادی و روش مذکور در جدول ۱ برای مدل‌هایی با ساختار متنوع ارائه می‌شوند. نتایج کیفی نیز برای مدلی با ساختار یک گوریل در شکل ۱۰ نشان داده می‌شوند.

<sup>۱</sup> Geodesic Distance



با توجه به نتایج ارائه شده، می‌توان عملکرد ضعیف این الگوریتم در هر دو بخش نمونه‌برداری یکسان و وقتی را در مقایسه با الگوریتم پیشنهادی مشاهده نمود. در بخش نمونه‌برداری یکسان به علت تخصیص تعداد نمونه یکسان به کل مدل، اطلاعات کمتری از جزئیات مدل کسب می‌شود. در بخش وقتی نیز به علت استفاده از مقادیر میانگین انحناها برای نمونه‌برداری، اثرات مربوط به بخش‌هایی با جزئیات بالا که انحناهای تندتری دارند توسط بخش‌هایی که انحناهای هموارتری دارند، خنثی شده و اطلاعات مربوط به جزئیات به درستی به دست نمی‌آیند. در الگوریتم پیشنهادی با توجه به این که نمونه‌برداری وقتی مطابق با اطلاعات فرکانسی انجام می‌شود، تعداد نمونه‌های تخصیص یافته به نواحی با جزئیات بالا بیشتر از تعداد نمونه‌های نواحی هموار در نظر گرفته می‌شود. در نواحی با جزئیات بالا با توجه به مقادیر بالای فرکانسی، فاصله نقاط نمونه‌برداری شده کاهش یافته و برعکس در نواحی هموارتر چون مقادیر فرکانسی کاهش می‌یابند، فاصله نمونه‌ها از همدیگر افزایش یافته و تعداد نمونه‌ها نیز کمتر می‌شوند. در نتیجه این عمل، تعداد نمونه‌ها متناسب با ویژگی‌های محلی مدل اخذ شده و در گام بازسازی نیز مدلی با دقت بالاتر تولید می‌شود.

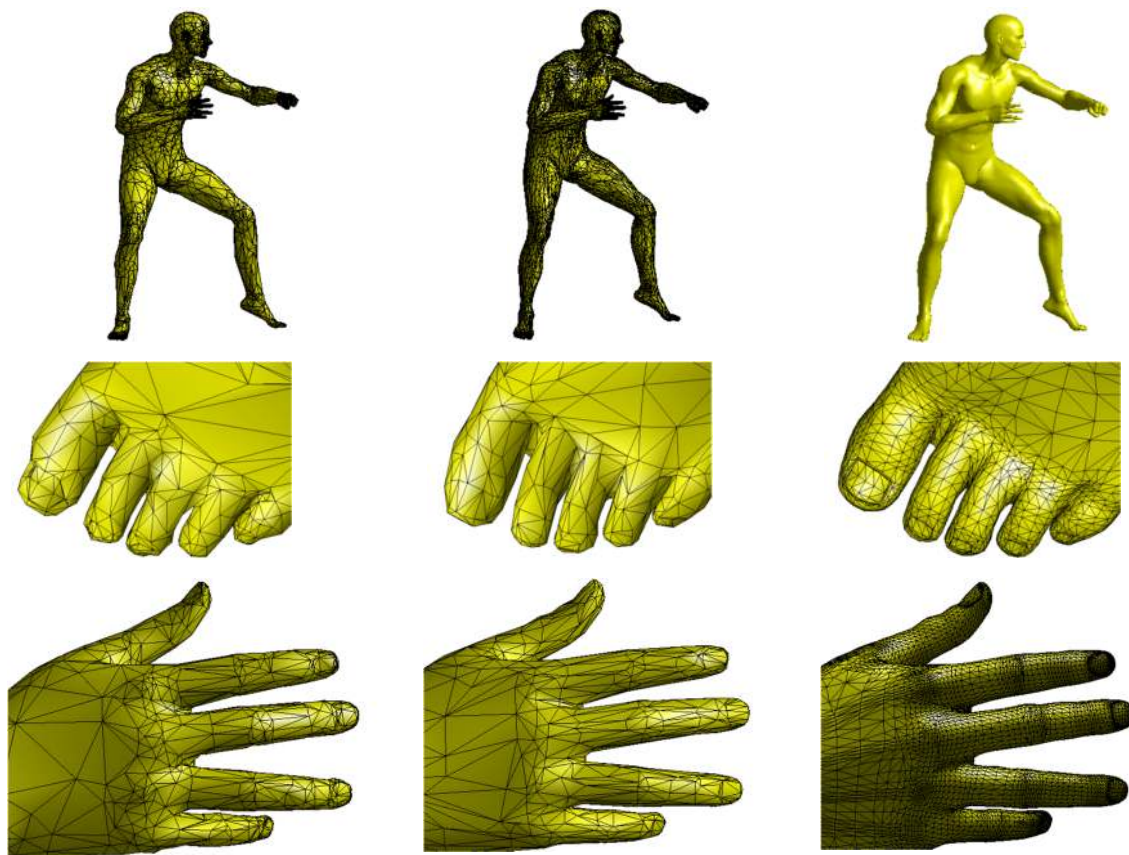
جدول ۱. مقایسه الگوریتم پیشنهادی با روش‌های ارائه شده در [۱۴] و [۳۵] (ارزیابی خطا بر اساس معیار مرجع [۳۶]).

نام مدل	تعداد رئوس	تعداد وجوه	تعداد رئوس و وجوه مش ساده شده		خطای MSDM2		
			وجه	راس	نمونه‌برداری وقتی [۳۵]	نمونه‌برداری یکسان [۳۵]	روش پیشنهادی [۱۴]
Gorilla	۴۱۳۹۵	۷۹۳۷۸	۶۹۳۴	۳۶۳۸	۰/۵۹۹۸۵۱	۰/۵۹۰۱۰	۰/۵۰۳۴۲
Dog	۲۵۲۹۰	۵۰۵۲۸	۹۱۱۸	۴۹۷۲	۰/۵۴۷۲۵	۰/۵۴۲۳۱	۰/۴۷۰۱۲
Cat	۲۷۸۹۴	۵۵۷۱۲	۸۹۴۶	۴۲۴۱	۰/۵۸۳۰۱	۰/۵۵۲۵۷	۰/۴۵۸۲۱
Michael	۵۲۵۶۵	۱۰۵۰۳۲	۱۶۳۸۰	۸۳۱۵	۰/۵۵۶۸۹	۰/۵۵۱۷۳	۰/۳۸۴۵۶
Horse	۱۹۲۴۸	۳۸۴۹۲	۷۸۵۶	۴۱۶۲	۰/۵۶۳۲۴	۰/۵۵۰۱۵	۰/۴۹۲۴۰
coffee-pot	۹۹۹۸	۲۰۰۰۰	۱۳۳۱	۲۶۶۳	۰/۵۶۴۷۸	۰/۵۴۳۷۰	۰/۴۸۰۲۱
Non uniform Torus	۱۰۰۰۰	۲۰۰۰۰	۳۱۷	۱۵۴	۰/۷۰۰۹۷	۰/۲۱۱۸۸	۰/۲۱۰۳۱
David	۵۲۵۶۵	۱۰۵۰۳۲	۳۰۰۰	۱۵۱۱	۰/۵۷۰۱۲	۰/۵۶۴۳۱	۰/۳۹۹۸۳
Centaur	۱۵۷۶۸	۳۱۵۳۲	۳۹۰۰	۱۹۵۲	۰/۵۸۰۲۱	۰/۵۷۴۶۱	۰/۵۰۴۱۲
Wolf	۴۳۴۴	۸۶۸۴	۲۰۰۰	۱۹۴۰	۰/۵۳۵۴۱	۰/۵۱۷۲۰	۰/۴۵۱۵۴
Shark	۲۸۶۰	۵۷۱۶	۹۵۰	۵۱۳	۰/۵۵۷۸۳	۰/۵۴۰۱۶	۰/۴۲۷۶۸
Lion	۳۴۰۰	۶۱۹۸	۱۸۰۰	۱۱۸۰	۰/۵۳۹۸۴	۰/۵۲۷۰۶	۰/۴۶۱۲۴

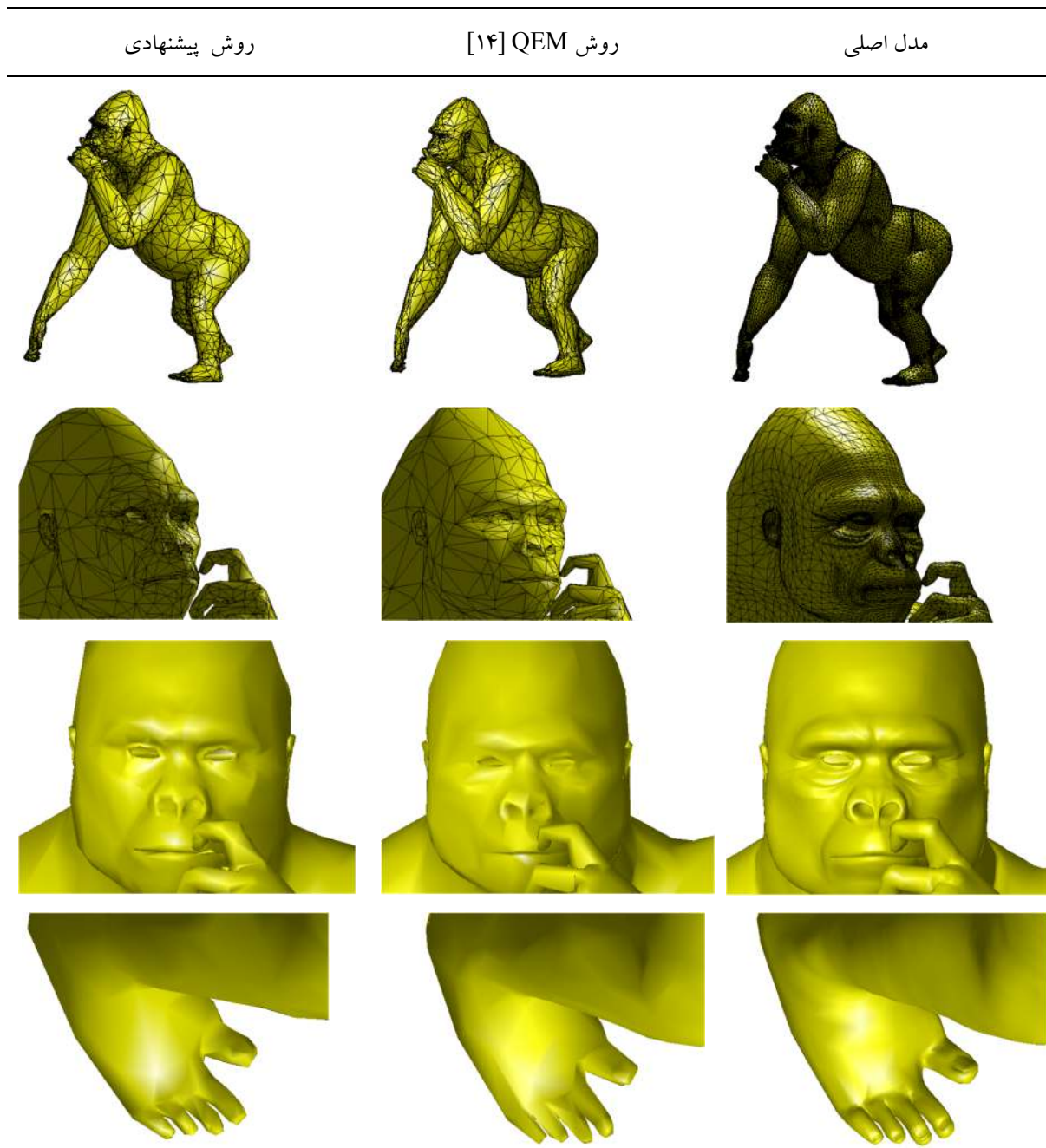
روش پیشنهادی

روش QEM [۱۴]

مدل اصلی

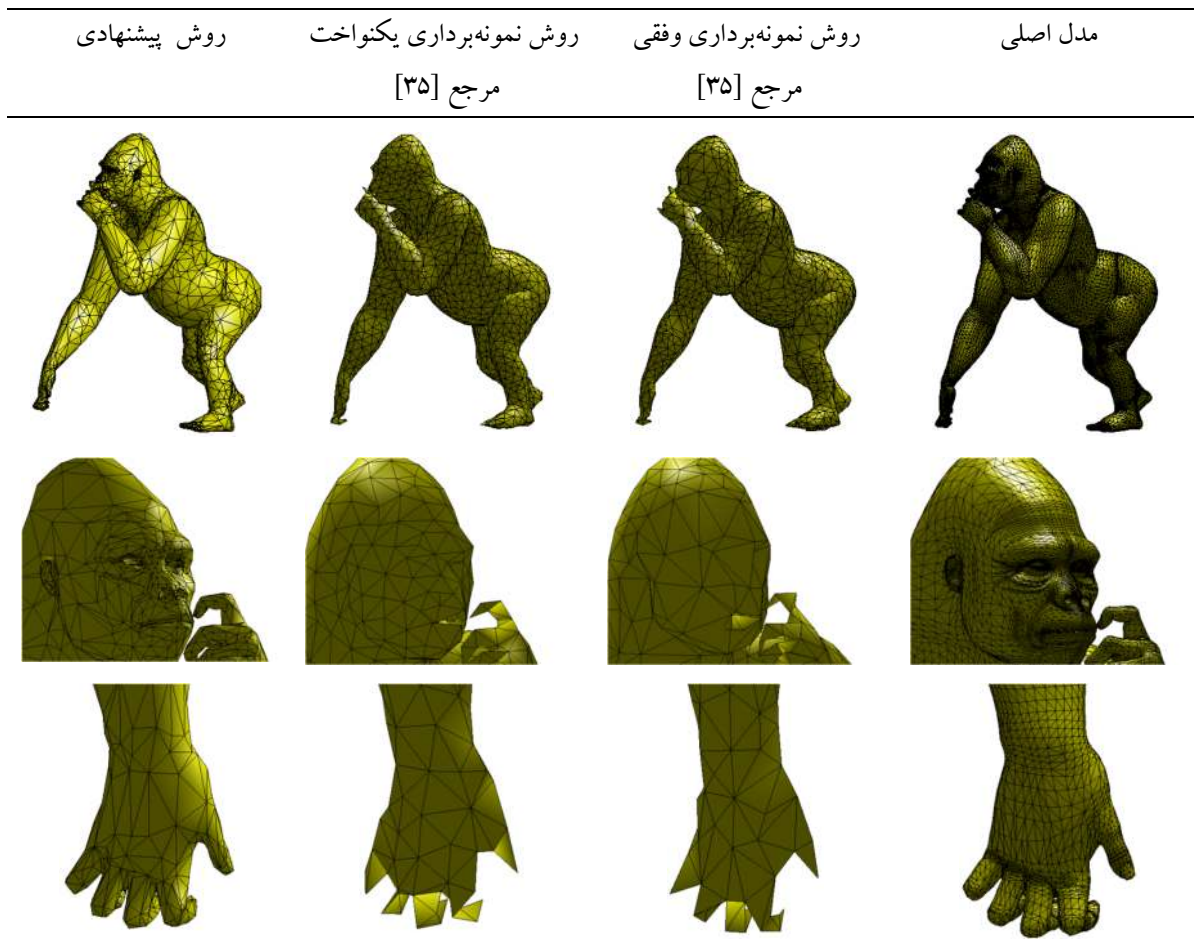


شکل ۸. مقایسه کیفی الگوریتم پیشنهادی با روش ارائه شده در مرجع [۱۴] برای مدل انسانی. مش اصلی با تعداد رئوس ۵۲۵۶۵ و تعداد وجوه ۱۰۵۰۳۲ به مشی با تعداد رئوس ۸۳۱۵ و تعداد وجوه ۱۶۳۸۰ ساده‌سازی شده است. جزئیات موجود در قسمت ناخن‌های دست و پا توسط روش [۱۴] حفظ نشده‌اند.



شکل ۹. مقایسه کیفی الگوریتم پیشنهادی با روش ارائه شده در مرجع [۱۴] برای مدلی با ساختار گوریل. مش اصلی با تعداد رئوس ۴۱۳۹۵ و تعداد وجوه ۷۹۳۷۸ به مشی با تعداد رئوس ۳۶۳۸ و تعداد وجوه ۶۹۳۴ ساده‌سازی شده است. عدم توانایی روش مرجع [۱۴] در حفظ جزئیات فرکانس بالا در قسمت صورت شامل انحناهای اطراف چشم، بینی و در قسمت پا شامل انحناهای انگشتان قابل مشاهده است.

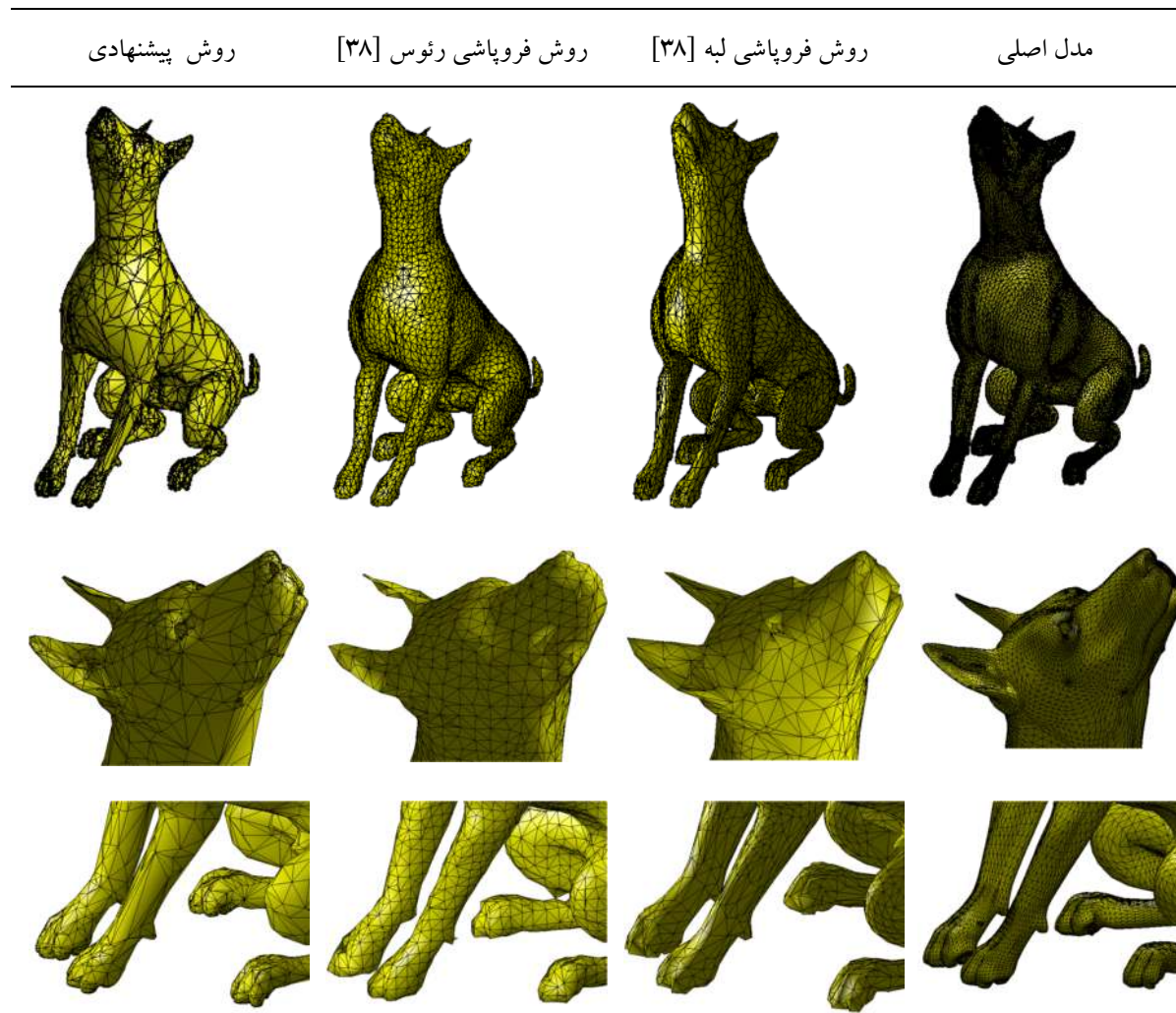
در ادامه، نتایج الگوریتم پیشنهادی با نتایج روش‌های ارائه شده در نرم‌افزار MeshLab [۳۸] که به‌عنوان یک مرجع شاخص در مقالات مورد استفاده قرار می‌گیرد، مقایسه می‌شوند. نتایج عددی این مقایسه در جدول ۲ ارائه شده و نتایج کیفی این مقایسه در شکل ۱۱ نشان داده می‌شوند. مطابق نتایج ارائه شده، می‌توان مشاهده نمود که الگوریتم پیشنهادی در مقایسه با روش‌های ارائه شده در نرم‌افزار MeshLab در حفظ جزئیات ریز و فرکانس بالای مدل، موفق‌تر عمل نموده است.



شکل ۱۰. مقایسه کیفی الگوریتم پیشنهادی با روش ارائه شده در مرجع [۳۵] برای مدلی با ساختار گوریل. مش اصلی با تعداد رئوس ۴۱۳۹۵ و تعداد وجوه ۷۹۳۷۸ به مشی با تعداد رئوس ۳۶۳۸ و تعداد وجوه ۶۹۳۴ ساده‌سازی شده است. نتایج ضعیف الگوریتم مرجع [۳۵] در حفظ جزئیات سر و دست مدل به‌طور کامل مشاهده می‌شود.

جدول ۲. مقایسه الگوریتم پیشنهادی با روش‌های ارائه شده در [۳۸] (ارزیابی خطا بر اساس معیار مرجع [۳۶])

نام مدل	تعداد رئوس	تعداد وجوه	تعداد رئوس و وجوه مش ساده شده		خطای MSDM2
			وجه	نمونه	
Gorilla	۴۱۳۹۵	۷۹۳۷۸	۶۹۳۴	۳۶۳۸	۰/۵۰۳۴۲
Dog	۲۵۲۹۰	۵۰۵۲۸	۹۱۱۸	۴۹۷۲	۰/۴۷۰۱۲
Cat	۲۷۸۹۴	۵۵۷۱۲	۸۹۴۶	۴۲۴۱	۰/۴۵۸۲۱
Michael	۵۲۵۶۵	۱۰۵۰۳۲	۱۶۳۸۰	۸۳۱۵	۰/۳۸۴۵۶
Horse	۱۹۲۴۸	۳۸۴۹۲	۷۸۵۶	۴۱۶۲	۰/۴۹۲۴۰
coffee-pot	۹۹۹۸	۲۰۰۰۰	۱۳۳۱	۲۶۶۳	۰/۴۸۰۲۱
Non uniform Torus	۱۰۰۰۰	۲۰۰۰۰	۳۱۷	۱۵۴	۰/۲۱۰۳۱
David	۵۲۵۶۵	۱۰۵۰۳۲	۳۰۰۰	۱۵۱۱	۰/۳۹۹۸۳
Centaur	۱۵۷۶۸	۳۱۵۳۲	۳۹۰۰	۱۹۵۲	۰/۵۰۴۱۲
Wolf	۴۳۴۴	۸۶۸۴	۲۰۰۰	۱۹۴۰	۰/۴۵۱۵۴
Shark	۲۸۶۰	۵۷۱۶	۹۵۰	۵۱۳	۰/۴۲۷۶۸
Lion	۳۴۰۰	۶۱۹۸	۱۸۰۰	۱۱۸۰	۰/۴۶۱۲۴



شکل ۱۱. مقایسه کیفی الگوریتم پیشنهادی با روش ارائه شده در مرجع [۳۸] برای مدلی با ساختار سگ. مش اصلی با تعداد رئوس ۲۵۲۹۰ و تعداد وجوه ۵۰۵۲۸ به مشی با تعداد رئوس ۴۹۷۲ و تعداد وجوه ۹۱۱۸ ساده‌سازی شده است. نرم‌افزار ارائه شده در مرجع [۳۸] قابلیت حفظ جزئیات فرکانس بالای مدل در بخش سر و پنجه‌های مش را به درستی ندارد. در نتایج مرجع [۳۸]، جزئیات مربوط به چشم‌ها، گوش‌ها، پنجه‌ها و بینی از مش حذف شده‌اند.

به منظور بررسی‌های بیشتر و نمایش عملکرد ارزیابی‌های مختلف بر اساس خطای هاسدورف و خطای جذر میانگین مربعات<sup>۱</sup> (RMS)، نتایج به دست آمده از این خطاها در جدول‌های ۳ و ۴ به ترتیب برای مدل‌های ساده‌سازی شده در شکل‌های ۹، ۱۰ و ۱۱ ارائه می‌شوند. با این که نتایج عددی حاصل از خطاهای هاسدورف و RMS برای سایر روش‌ها، کمتر از خطای به دست آمده برای الگوریتم پیشنهادی هستند، اما در عمل با مشاهده نتایج ارائه شده در شکل‌های متناظر می‌توان عکس این مسئله را مشاهده نمود. برای مثال در شکل‌های ۹ و ۱۰ انگشتان دست و صورت مدل گوریل، اعوجاج فراوانی داشته و حتی شکل اصلی انگشتان از بین رفته است اما برخلاف نتایج بصری، نتایج گزارش شده برای الگوریتم پیشنهادی و روش QEM بر مبنای خطاهای هاسدورف و RMS بیشتر از خطاهای به دست آمده برای الگوریتم‌های بیان شده در روش [۳۵] می‌باشند. این نوع از خطاها میزان جابه‌جایی رئوس بین مش ساده‌سازی شده و مش اصلی را مورد سنجش قرار می‌دهند و اطلاعاتی در مورد میزان تغییرات انحناهای کوچک و جزئی در سطح

<sup>۱</sup> Root\_mean\_square error

مش در اختیار کاربر قرار نمی‌دهند. عدم توجه به تغییرات انحنا در محاسبه خطا باعث می‌شود که تغییرات مربوط به جزئیات سطح مش نادیده گرفته شوند.

این مسئله در مورد نتایج گزارش شده در جدول ۴ و شکل ۱۱ نیز صادق است. با دقت در صورت و پنجه مدل سگ می‌توان اعوجاج‌هایی را در نتایج حاصل از روش‌های بیان شده در [۳۸] دید که این اعوجاج‌ها در نتایج بصری به‌دست آمده از روش پیشنهادی وجود ندارند و الگوریتم پیشنهادی توانسته شکل اصلی مدل را به همراه جزئیات حفظ نماید. اما برخلاف تصاویر به‌دست آمده، روش فروپاشی رئوس، کمترین میزان خطای هاسدورف و RMS را برای بیان میزان شباهت بین مدل اصلی و مدل ساده‌سازی شده در مقایسه با روش پیشنهادی و روش فروپاشی لبه ارائه می‌دهد. با دقت در نتایج بصری می‌توان مشاهده نمود که این روش حتی موفق به حفظ شکل اصلی پنجه و صورت مدل نبوده است. با توجه به تصاویر به‌دست آمده و بررسی نتایج عددی می‌توان مشاهده نمود که خطاهای مبتنی بر هاسدورف و RMS کاملاً مطابق با ارزیابی بصری انسان نبوده و نمی‌توانند به‌درستی، اعوجاج در بخش‌هایی با جزئیات ریزتر (اطلاعات فرکانس بالا) را گزارش دهند. بنابراین، با توجه به این که هدف اصلی الگوریتم پیشنهادی، حفظ جزئیات فرکانس بالا در مدل می‌باشد، ارزیابی‌هایی که مطابق با مشاهدات انسانی هستند می‌توانند نتایج دقیق‌تری نسبت به سایر روش‌های خطایابی ارائه دهند.

در صورتی که هدف از ساده‌سازی، صرفاً حفظ شکل کلی مدل باشد، می‌توان از روش‌های خطایابی بر مبنای خطای هاسدورف و خطای جذر میانگین مربعات بهره‌برداری کرد. در غیر این صورت این روش‌ها معیار مناسبی برای بیان جزئیات موجود در سطح مدل نیستند.

جدول ۳. مقایسه روش‌های مختلف خطایابی برای مدل‌های ساده‌سازی شده گوریل در شکل‌های ۹ و ۱۰.

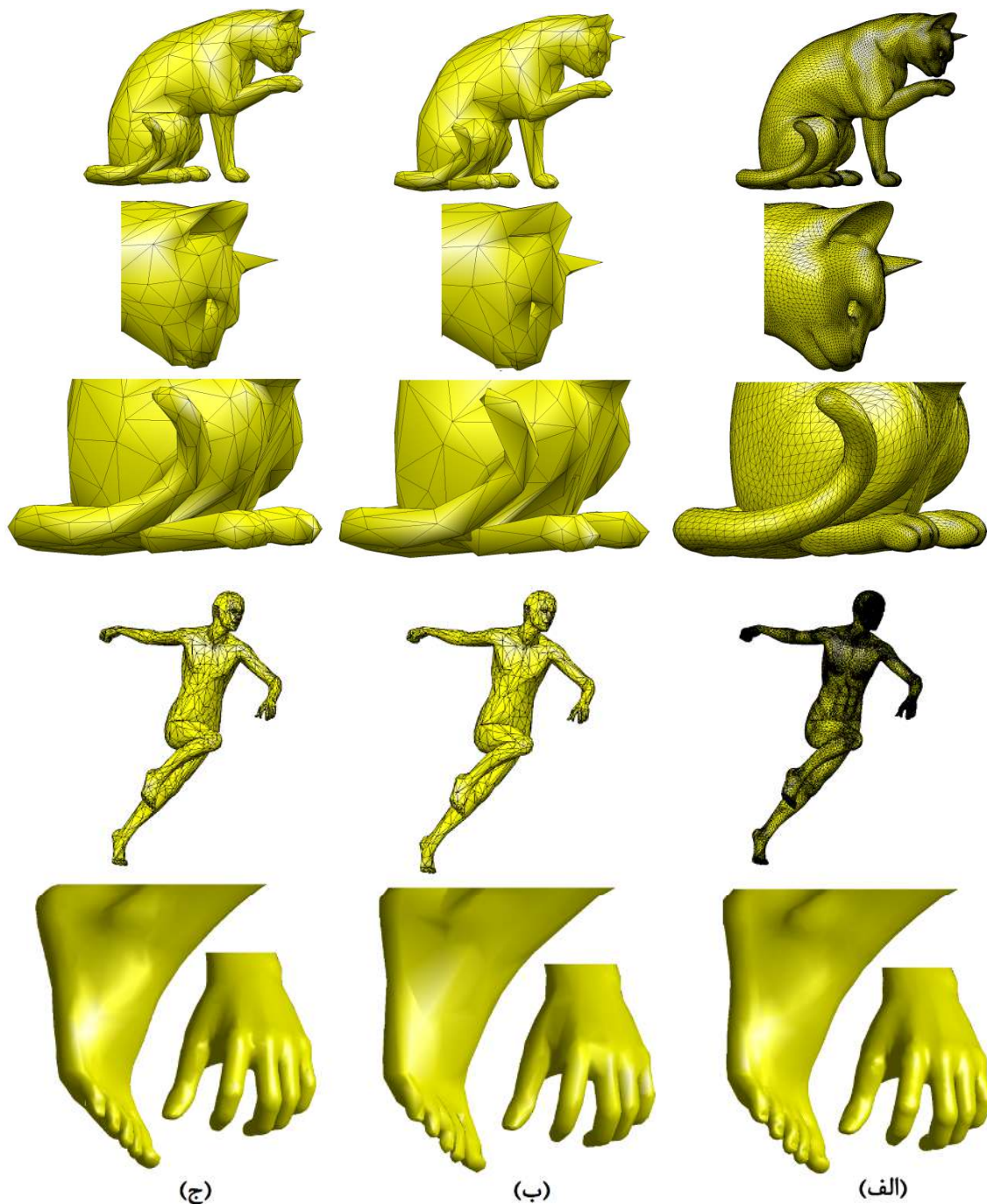
روش خطایابی	روش نمونه‌براری یکنواخت مرجع [۳۵]	روش نمونه‌برداری وقتی مرجع [۳۵]	روش QEM [۱۴]	روش پیشنهادی
خطای جذر میانگین مربعات	۰/۰۰۰۶۰	۰/۰۰۰۶۱	۰/۰۰۰۶۲	۰/۰۰۰۶۲
خطای هاسدورف (متوسط)	۰/۰۰۰۴۰	۰/۰۰۰۴۱	۰/۰۰۰۴۵	۰/۰۰۰۴۴
خطای هاسدورف (بیشینه)	۰/۰۰۴۴۸	۰/۰۰۴۴۲	۰/۰۰۴۵۵	۰/۰۰۴۵۴

جدول ۴. مقایسه روش‌های مختلف خطایابی برای مدل ساده‌سازی شده سگ در شکل ۱۱.

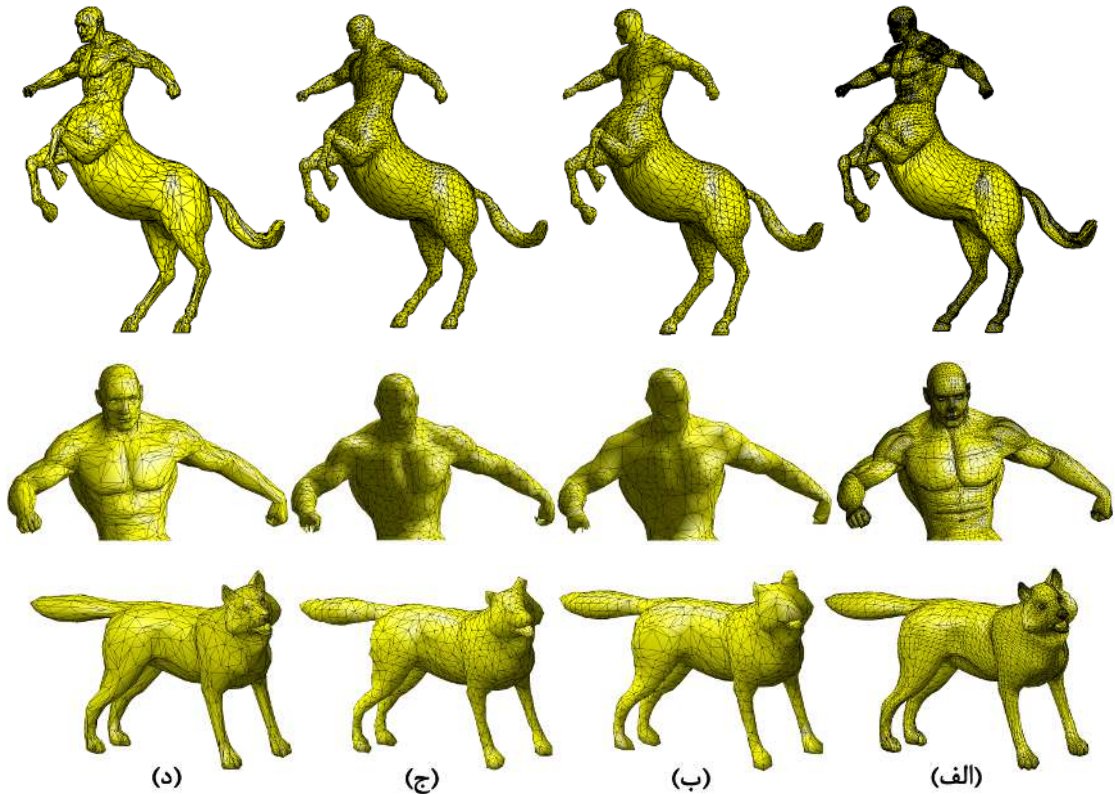
روش خطایابی	روش فروپاشی لبه [۳۸]	روش فروپاشی رئوس [۳۸]	روش پیشنهادی
خطای جذر میانگین مربعات	۰/۰۰۲۳۶	۰/۰۰۱۹۹	۰/۰۰۲۲۱
خطای هاسدورف (متوسط)	۰/۰۰۱۴۹	۰/۰۰۱۰۷	۰/۰۰۱۴۸
خطای هاسدورف (بیشینه)	۰/۰۲۱۱۰	۰/۰۰۱۹۴	۰/۰۲۱۰۱

در ادامه برای مقایسه بیشتر نتایج الگوریتم پیشنهادی از مدل‌های دیگر موجود در پایگاه داده [۳۹] استفاده می‌شود. در شکل‌های ۱۲، ۱۳ و ۱۴ می‌توان نتایج به‌دست آمده از این ارزیابی‌ها را برای مدل‌های متفاوت و روش‌های مقایسه‌ای مختلف مشاهده نمود. در تمامی

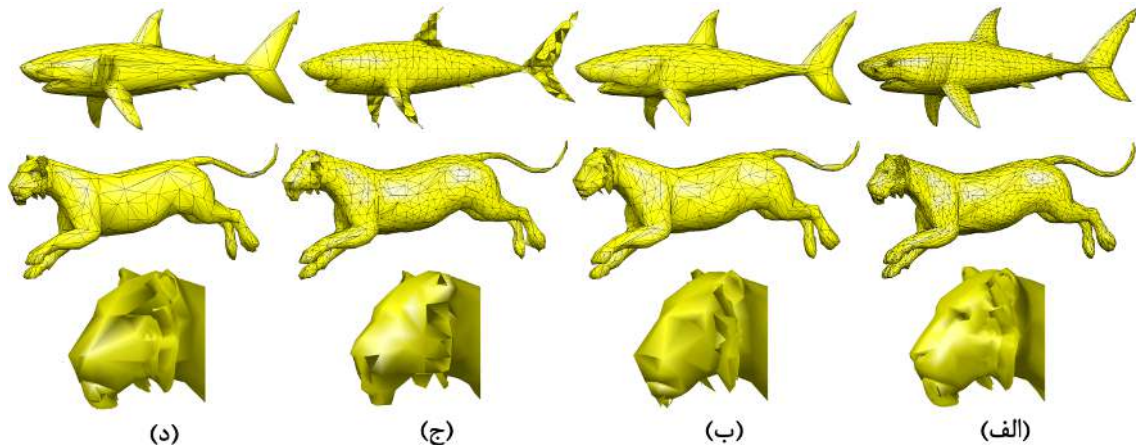
تصاویر به‌دست آمده، می‌توان عملکرد موفق الگوریتم پیشنهادی در حفظ جزئیات را به وضوح دید. همچنین نتایج عددی این ارزیابی‌ها به ترتیب در جدول‌های ۱ و ۲ گزارش شده‌اند.



شکل ۱۲. مقایسه کیفی الگوریتم پیشنهادی با روش ارائه شده در مرجع [۱۴] برای مدل‌هایی با ساختار گره‌به و ورزشکار. (الف) مش اصلی. (ب) مش ساده‌سازی شده با روش ادغام لبه در مرجع [۱۴]. (ج) مش ساده‌سازی شده با روش پیشنهادی. مش اصلی گره‌به با تعداد رئوس ۲۷۸۹۴ و تعداد وجوه ۵۵۷۱۲ به مشی با تعداد رئوس ۴۲۴۱ و تعداد وجوه ۸۹۴۶ ساده‌سازی شده است. عدم توانایی روش مرجع [۱۴] در حفظ جزئیات فرکانس بالا در قسمت صورت، پنجه و دم گره‌به قابل مشاهده است. مش اصلی ورزشکار با تعداد رئوس ۵۲۵۶۵ و تعداد وجوه ۱۰۵۰۳۲ به مشی با تعداد رئوس ۱۵۱۱ و تعداد وجوه ۳۰۰۰ ساده‌سازی شده است. عدم توانایی روش مرجع [۱۴] در حفظ جزئیات فرکانس بالا در قسمت ناخن‌ها و انگشتان دست و پا قابل مشاهده است.



شکل ۱۳. مقایسه کیفی الگوریتم پیشنهادی با روش ارائه شده در مرجع [۳۵] برای مدلهایی با ساختار قنطورس و گرگ. (الف) مش اصلی. (ب) مش ساده‌سازی شده با روش نمونه‌برداری وقتی مرجع [۳۵]. (ج) مش ساده‌سازی شده با نمونه‌برداری یکنواخت در مرجع [۳۵]. (د) مش ساده‌سازی شده با روش پیشنهادی. مش اصلی قنطورس با تعداد رئوس ۱۵۷۶۸ و تعداد وجوه ۳۱۵۳۲ به مشی با تعداد رئوس ۱۹۵۲ و تعداد وجوه ۳۹۰۰ ساده‌سازی شده است. مش اصلی گرگ با تعداد رئوس ۴۳۴۴ و تعداد وجوه ۸۶۸۴ به مشی با تعداد رئوس ۱۹۴۰ و تعداد وجوه ۲۰۰۰ ساده‌سازی شده است. نتایج ضعیف الگوریتم مرجع [۳۵] در حفظ جزئیات صورت، بالاتنه و انگشتان دست مدل قنطورس و همچنین عدم حفظ جزئیات در صورت و پنجه‌های گرگ به‌طور کامل مشاهده می‌شود.



شکل ۱۴. مقایسه کیفی الگوریتم پیشنهادی با روش ارائه شده در مرجع [۳۸] برای مدلهایی با ساختار کوسه و شیر. (الف) مش اصلی. (ب) مش ساده‌سازی شده با روش فروپاشی لبه مرجع [۳۸]. (ج) مش ساده‌سازی شده با روش فروپاشی رئوس مرجع [۳۸]. (د) مش ساده‌سازی شده با روش پیشنهادی. مش اصلی کوسه با تعداد رئوس ۲۸۶۰ و تعداد وجوه ۵۷۱۶ به مشی با تعداد رئوس ۵۱۳ و تعداد وجوه ۹۵۰ ساده‌سازی شده است. مش اصلی شیر با تعداد رئوس ۳۴۰۰ و تعداد وجوه ۶۱۹۸ به مشی با تعداد رئوس ۱۱۸۰ و تعداد وجوه ۱۸۰۰ ساده‌سازی شده است. نرم‌افزار ارائه شده در مرجع [۳۸] قابلیت حفظ جزئیات فرکانس بالای مدل در بخش باله‌ها، آبشش و سر کوسه و همچنین جزئیات مربوط به سر و پنجه‌های مدل شیر را به‌درستی ندارد.



## ۴-۳- پیچیدگی محاسباتی

در الگوریتم ارائه شده در صورتی که  $n$  تعداد کل رئوس موجود در مش در نظر گرفته شود، پیچیدگی محاسباتی در مرحله نمونه‌برداری و به‌روزرسانی نمونه‌های منتخب در هر بخش محلی برابر با  $O(n \log n)$  خواهد بود. در مرحله مش‌بندی مجدد نمونه‌های انتخابی، پیچیدگی محاسباتی برابر با  $O(m)$  خواهد بود که  $m$  بیانگر تعداد نمونه‌های انتخابی از مرحله نمونه‌برداری است. پیچیدگی محاسباتی برای روش ادغام لبه [۱۴] برابر با  $O(n \log n)$  در نظر گرفته می‌شود. در این روش نیازی به مش‌بندی مجدد نمونه‌های انتخابی نبوده و همین امر باعث می‌شود که روش ادغام لبه از سرعت بهتری نسبت به الگوریتم پیشنهادی برخوردار باشد. اما کیفیت مدل‌های ساده‌سازی شده توسط روش ادغام لبه پایین‌تر از کیفیت نتایج ارائه شده در الگوریتم پیشنهادی بوده و این روش، عملکرد ضعیفی در حفظ جزئیات ریز و مهم در سطح مدل دارد. همچنین پیچیدگی محاسباتی که برای مرحله نمونه‌برداری در مرجع [۳۵] در نظر گرفته می‌شود برابر با  $O(n \log(n)^2)$  می‌باشد. در این روش نیز به منظور مش‌بندی مجدد نمونه‌های انتخابی، به گام اضافی مش‌بندی نیاز می‌باشد. در جدول ۵ مقایسه زمانی بین روش‌های مختلف انجام شده.

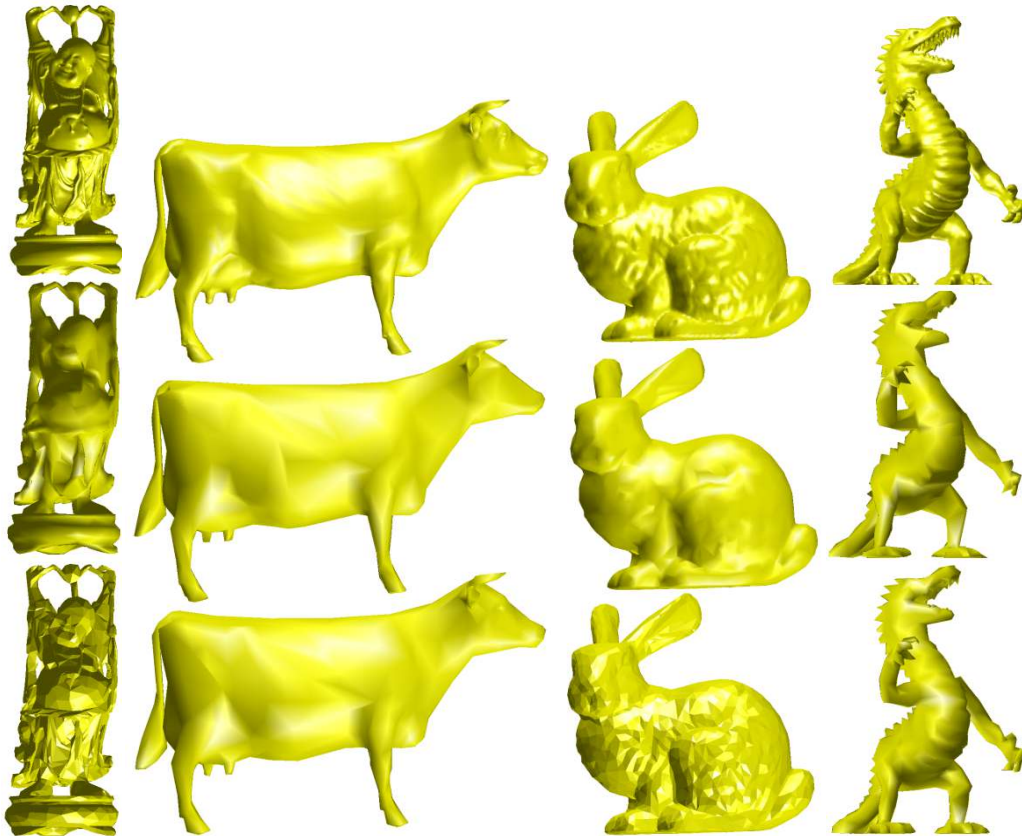
جدول ۵. مقایسه زمانی روش‌های مختلف.

نام مدل	تعداد وجه اصلی	تعداد وجه کاهشی	زمان (ثانیه)		روش		روش		
			روپاشی لبه [۳۸]	روپاشی رئوس [۳۸]	نمونه‌برداری وقتی [۳۵]	نمونه‌برداری یکسان [۳۵]	روش پیشنهادی [۲۹]	روش پیشنهادی	
Gorilla	۷۹۳۷۸	۶۹۳۴	۰/۲۳۴	۰/۰۸۱	۲۹/۳۵	۲۷/۸۳	۱۲/۹۴	۲۶/۵۶	۲۱/۳۴
Dog	۵۰۵۲۸	۹۱۱۸	۰/۲۰۳	۰/۰۶۸	۲۴/۷۱	۲۱/۸۳	۸/۶۴	۲۰/۳۲	۱۶/۴۱
Cat	۵۵۷۱۲	۸۹۴۶	۰/۲۱۸	۰/۰۷۱	۲۵/۳۳	۲۳/۵۶	۹/۴۳	۲۲/۱۱	۱۸/۴۱
Michael	۱۰۵۰۳۲	۱۶۳۸۰	۰/۳۶۹	۰/۰۸۹	۳۳/۰۱	۲۹/۱۳	۱۶/۴۲	۲۸/۱۷	۲۴/۶۷
Horse	۳۸۴۹۲	۷۸۵۶	۰/۱۹۵	۰/۰۶۳	۲۴/۰۶	۲۲/۶۸	۶/۱۱	۲۱/۰۵	۱۶/۷۷
coffee-pot	۲۰۰۰۰	۱۳۳۱	۰/۱۹۱	۰/۰۶۱	۲۰/۱۰	۱۸/۱۴	۵/۱۹	۱۷/۲۳	۱۳/۴۲
Non uniform Torus	۲۰۰۰۰	۳۱۷	۰/۱۹۹	۰/۰۶۶	۲۱/۰۳	۲۰/۰۱	۷/۹۷	۱۹/۲۰	۱۵/۹۸
David	۱۰۵۰۳۲	۳۰۰۰	۰/۳۹۷	۰/۱۰۳	۳۲/۱۱	۳۰/۰۶	۱۷/۷۶	۲۹/۱۱	۲۵/۴۴
Centaur	۳۱۵۳۲	۳۹۰۰	۰/۱۸۳	۰/۰۵۹	۱۹/۹۵	۱۷/۳۸	۴/۹۴	۱۶/۱۰	۱۲/۳۵
Wolf	۸۶۸۴	۲۰۰۰	۰/۱۳۱	۰/۰۵۵	۱۷/۹۹	۱۵/۲۷	۱/۶۳	۱۴/۰۲	۱۰/۹۸
Shark	۵۷۱۶	۹۵۰	۰/۱۰۱	۰/۰۵۱	۱۳/۶۸	۱۲/۱۰	۱/۱۲	۱۱/۱۵	۹/۱۱
Lion	۶۱۹۸	۱۸۰۰	۰/۱۲۴	۰/۰۵۳	۱۶/۹۸	۱۴/۹۷	۱/۲۹	۱۳/۰۳	۱۰/۰۲

با توجه به نتایج زمانی ارائه شده در جدول ۵ می‌توان فهمید که از لحاظ زمانی، به ترتیب الگوریتم‌های مبتنی بر فروپاشی رئوس [۳۸]، فروپاشی لبه [۳۸] و ادغام لبه [۱۴] بهتر از الگوریتم پیشنهادی عمل کرده و در مدت زمان کمتری فرآیند ساده‌سازی را تکمیل می‌کنند. ولی الگوریتم‌های ارائه شده بر اساس نمونه‌برداری یکنواخت و وقتی [۳۵] و [۲۹] در مقایسه با الگوریتم پیشنهادی عملکرد مناسبی نداشته و به مدت زمان بیشتری برای اجرای فرآیند ساده‌سازی نیاز دارند. با توجه به این که در الگوریتم‌های مبتنی بر روش‌های نمونه‌برداری، گام مش‌بندی در یک مرحله جداگانه بر روی نمونه‌ها اعمال می‌شود، به مدت زمان بیشتری برای تکمیل فرآیند ساده‌سازی مش نیاز است.

#### ۴-۴- مقایسه با مدل‌های متنوع

در ادامه برای نمایش بهتر عملکرد الگوریتم پیشنهادی در مقایسه با روش‌های دیگر، چند ارزیابی دیگری نیز انجام می‌شود که در این ارزیابی‌ها از تصاویر متنوع ارائه شده در تحقیقات [۴۰-۴۲] استفاده می‌شود. در شکل‌های ۱۵، ۱۶ و ۱۷ و همچنین در جدول-های ۶، ۷ و ۸ به ترتیب نتایج کیفی و کمی ارزیابی‌های انجام شده با تصاویر متفاوت نشان داده می‌شوند.



شکل ۱۵. مقایسه کیفی روش پیشنهادی با الگوریتم [۴۰] بر اساس تصاویر متنوع ارائه شده در روش [۴۰]. ردیف‌های اول، دوم و سوم به ترتیب شامل تصاویر مدل اصلی، مدل ساده‌سازی شده با روش [۴۰] و مدل ساده‌سازی شده با الگوریتم پیشنهادی هستند. با دقت در تصاویر به دست آمده می‌توان جزئیات بیشتری را در مدل‌های ساده‌سازی شده توسط روش پیشنهادی مشاهده نمود. برای مثال در مدل گاو، چشم، پوزه و سم‌ها با جزئیات بیشتری نشان داده می‌شوند. در مدل خرگوش، برجستگی‌های بدن، چشم، دهان و پاها دارای جزئیات بیشتری هستند. در مدل دایناسور برجستگی دندان‌ها، تیغ‌های پشت بدن و انحنای گردن، زیر بدن و انگشتان دست با کیفیت بیشتری در روش پیشنهادی نشان داده می‌شوند. در مدل بودا، جزئیات صورت مانند بینی و دهان، انحنای بدن و لباس بهتر دیده می‌شوند.

با توجه به تصاویر مدل‌های ساده‌سازی شده و تصاویر مدل‌های اصلی در شکل ۱۵ می‌توان به عملکرد دقیق روش پیشنهادی در حفظ جزئیات موجود بر روی سطح مش پی‌برد.

جدول ۶. مقایسه الگوریتم پیشنهادی با روش [۴۰] برای تصاویر ارائه شده در شکل ۱۵ مبتنی بر ارزیابی خطا مرجع [۳۶].

Cow	Buddha	Dinosaur	Bunny	نام مدل
#V=۲۹۰۴	#V=۵۴۳۶۵۲	#V=۲۵۴۱۸	#V=۳۵۹۴۷	تعداد رئوس مش اصلی
#F=۵۸۰۴	#F=۱۰۸۷۷۱۶	#F=۵۰۷۶۱	#F=۶۹۴۵۱	تعداد وجوه مش اصلی
۰/۳۵۳۲۲	۰/۳۶۰۲۳	۰/۴۹۸۴۷	۰/۶۷۹۵۲	خطای روش [۴۰]
۰/۳۳۹۲۰	۰/۳۴۸۰۱	۰/۴۷۷۶۴	۰/۶۶۲۰۳	خطای روش پیشنهادی



شکل ۱۶. مقایسه کیفی روش پیشنهادی با الگوریتم [۴۱] بر اساس تصاویر متنوع ارائه شده در روش [۴۱]. ستون‌های اول، دوم و سوم به ترتیب شامل تصاویر مدل اصلی، مدل ساده‌سازی شده با روش [۴۱] و مدل ساده‌سازی شده با الگوریتم پیشنهادی هستند. با دقت در تصاویر می‌توان مشاهده کرد که در مدل‌های ساده‌سازی شده توسط روش پیشنهادی، جزئیات بیشتری وجود دارند. برای مثال در مدل سر می‌توان جزئیات بیشتری را در محل چشم، لب، خراش صورت و موج‌های موی سر مشاهده نمود. همچنین در مدل اژدها می‌توان جزئیات بیشتری را در محل برجستگی‌های اطراف بدن، دندان‌ها، انحناهای پای عقب و موی سر مشاهده کرد. در مدل اسکلت، انحناها در محل مفاصل شباهت بیشتری به مدل اصلی داشته و شکل و اندازه استخوان‌ها با دقت بالاتری ساده‌سازی شده‌اند.

با توجه به تصاویر ارائه شده در شکل ۱۶ می‌توان به عملکرد دقیق روش پیشنهادی در حفظ جزئیات در مقایسه با روش [۴۱] بیشتر پی برد. نتایج عددی نیز گویای عملکرد بهتر الگوریتم پیشنهادی هستند.

جدول ۷. مقایسه الگوریتم پیشنهادی با روش [۴۱] برای تصاویر ارائه شده در شکل ۱۶ مبتنی بر ارزیابی خطا مرجع [۳۶].

نام مدل	Venus	Foot skeleton	Dragon
تعداد رئوس مش اصلی	#V=۵۰۰۰۲	#V=۲۱۵۴	#V=۴۳۷۶۴۵
تعداد وجوه مش اصلی	#F=۱۰۰۰۰۰	#F=۴۲۰۴	#F=۸۷۱۴۱۴
خطای روش [۴۱]	۰/۴۷۴۹۸	۰/۴۱۷۵۸	۰/۳۵۰۶۲
خطای روش پیشنهادی	۰/۴۶۵۶۳	۰/۳۹۶۴۹	۰/۳۴۶۵۱



شکل ۱۷. مقایسه کیفی روش پیشنهادی با الگوریتم [۴۲] بر اساس تصاویر متنوع ارائه شده در روش [۴۲]. ستون‌های اول، دوم و سوم به ترتیب شامل تصاویر مدل اصلی، مدل ساده‌سازی شده با روش [۴۲] و مدل ساده‌سازی شده با الگوریتم پیشنهادی هستند. با دقت در تصاویر به‌دست آمده می‌توان جزئیات بیشتری را در مدل‌های ساده‌سازی شده توسط روش پیشنهادی مشاهده نمود. برای مثال در مدل سردیس یک سرباز، چشم‌ها، لب، بینی، موج‌های موی سر و حکاکی روی کلاه با جزئیات بیشتری نشان داده می‌شوند. در مدل فرشته، چشم، دهان، بینی، انگشتان دست مشعل‌گیر، انگشتان پاها، پایه مشعل دارای جزئیات بیشتری هستند. در مدل اسب، عضله‌های روی پای عقب، سم‌ها و بینی با کیفیت بیشتری نشان داده می‌شوند.

با توجه به تصاویر مدل‌های ساده‌سازی شده و تصاویر مدل‌های اصلی می‌توان مشاهده نمود که در شرایط یکسان، الگوریتم پیشنهادی در حفظ جزئیات موفق‌تر عمل کرده است. با توجه به نتایج به‌دست آمده، می‌توان بیان کرد که الگوریتم پیشنهادی وابسته به ساختار مدل نبوده و می‌تواند جزئیات موجود بر روی سطح مش را پس از ساده‌سازی همچنان حفظ نماید.

جدول ۸. مقایسه الگوریتم پیشنهادی با روش [۴۲] برای تصاویر ارائه شده در شکل ۱۷ مبتنی بر ارزیابی خطا مرجع [۳۶].

Horse	Ateneam	Lucy	نام مدل
#V=۴۸۴۸۵	#V=۷۵۴۶	#V=۲۲۴۴۴۵	تعداد رئوس مش اصلی
#F=۹۶۹۶۶	#F=۱۵۰۱۴	#F=۴۴۸۸۸۰	تعداد وجوه مش اصلی
۰/۴۵۲۱۹	۰/۳۲۰۱۳	۰/۲۵۹۲۰	خطای روش [۴۲]
۰/۴۴۶۹۱	۰/۳۱۱۳۹	۰/۲۳۲۶۶	خطای روش پیشنهادی

## ۵- نتیجه‌گیری

در این مقاله، راهکاری برای ساده‌سازی مش مبتنی بر نمونه‌برداری نایکوئیست ارائه شد. با توجه به این که در حوزه طیفی، اطلاعات جزئی در سیگنال با فرکانس‌های بالا و اطلاعات کلی سیگنال با فرکانس‌های پایین بیان می‌شوند، می‌توان نمونه‌برداری وقتی را برای یک سیگنال تعریف نمود. در نتیجه در محل‌هایی با جزئیات بیشتر، تعداد نمونه‌ها افزایش یافته و برعکس در بخش‌هایی با جزئیات کمتر، تعداد نمونه‌ها کاهش می‌یابد. زمانی که نمونه‌برداری طبق اطلاعات موجود در سیگنال انجام می‌شود، می‌توان مدلی با دقت بالا را با تعداد نمونه‌های کمتری بازسازی نمود. توسط نمونه‌های کسب شده، مش‌بندی جدیدی برای توده نقاط به‌دست می‌آید که در نهایت با عملیات درون‌یابی می‌توان مدلی با کیفیت بالا مشابه مدل اصلی را کسب نمود. نتایج حاصل، نشانگر عملکرد بهینه سیستم در بازسازی مدل سه‌بعدی با استفاده از نمونه‌های انتخابی از تئوری نایکوئیست می‌باشد.

## مراجع

- [1] P. Hinker and C. Hansen, "Geometric Optimization," In: Proceedings of the 4th Conference on Visualization '93. VIS '93. San Jose, California: IEEE Computer Society, pp. 189–195, 1993.
- [2] A.D. Kalvin and R.H. Taylor, "Superfaces: Polygonal Mesh Simplification with Bounded Error," In: IEEE Comput. Graph. Appl, vol. 16, no.3, pp. 64–77, 1996.
- [3] D. Luebke and C. Erikson, "View-dependent Simplification of Arbitrary Polygonal Environments," In: Proceedings of the 24th Annual Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques. SIGGRAPH '97. New York, NY, USA: ACM Press/Addison-Wesley Publishing Co, pp. 199–208, 1997.
- [4] S. Schaefer and J. Warren, "Adaptive Vertex Clustering Using Octrees," In: SIAM Geometric Design and Computing, pp. 491–500, 2003.
- [5] T. Kanaya and K.I. Kobori, "A Method of Model Simplification Using Spatial Partitioning," In: The Journal of the Institute of Image Information and Television Engineers 56.4, pp. 636–642, 2002.
- [6] G. Pengdong, L. Ameng, L. Yongquan, W. Jintao, L. Nan, and Y. Wenhua, "Adaptive Mesh Simplification Using Vertex Clustering with Topology Preserving," In: Computer Science and Software Engineering, 2008 International Conference on. Wuhan, Hubei: IEEE, pp. 971–974, 2008.

- [7] L. Nan, G. Pengdong, L. Yongquan, L. Ameng, and Y. Wenhua, "A New Adaptive Mesh Simplification Method Using Vertex Clustering with Topology-and-Detail Preserving," In: Proceedings of the 2008 International Symposium on Information Science and Engineering - Volume 01. ISISE '08. Washington, DC, USA: IEEE Computer Society, pp. 150–153, 2008.
- [8] K.L. Low and T.S. Tan, "Model Simplification Using Vertex clustering," In: Proceedings of the 1997 Symposium on Interactive 3D Graphics. I3D '97. Providence, Rhode Island, USA: ACM, 75–ff, 1997.
- [9] W.J. Schroeder, J.A. Zarge, and W.E. Lorensen, "Decimation of Triangle Meshes," In: Proceedings of the 19th Annual Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques. SIGGRAPH '92. New York, NY, USA: ACM, pp. 65–70, 1992.
- [10] J.C. Xia, J. El-Sana, and A. Varshney, "Adaptive Real-Time Level-of-Detail-Based Rendering for Polygonal Models," In: IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics, vol. 3, no. 2, pp. 171–183, 1997.
- [11] R. Ronfard and J. Rossignac, "Full-range Approximation of Triangulated Polyhedra," In: Computer Graphics Forum 15, pp. 67–76, 1996.
- [12] M.E. Algorri and F. Schmitt, "Mesh Simplification," In: Proceedings of the 1996 Eurographics, Tutorials, pp. 77–86, 1996.
- [13] W.J. Schroeder, "A Topology Modifying Progressive Decimation Algorithm," In: Proceedings of the 8th Conference on Visualization '97. VIS '97. Phoenix, Arizona, USA: IEEE Computer Society Press, pp. 205–212, 1997.
- [14] M. Garland and P.S. Heckbert, "Surface Simplification Using Quadric Error Metrics," In: Proceedings of the 24th Annual Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques. SIGGRAPH '97. New York, NY, USA: ACM Press/Addison-Wesley Publishing Co., pp. 209–216, 1997.
- [15] E. Ovreiu, S. Valette, V. Buzuloiu, and R. Prost, "Mesh simplification using an accurate measured quadratic error," In: 10th International Symposium on Signals, Circuits and Systems (ISSCS). IEEE Computer Society, pp. 1–4, 2011.
- [16] P. Alliez, N. Laurent, H. Sanson, and F. Schmitt, "Mesh Approximation Using a Volume-Based Metric," In: Proceedings of the 7th Pacific Conference on Computer Graphics and Applications. PG '99. Washington, DC, USA: IEEE Computer Society, pp. 292–301, 1999.
- [17] B. Hamann, "A Data Reduction Scheme for Triangulated Surfaces," In: Computer Aided Geometric Design, vol. 11, no. 2, pp. 197–214, 1994.
- [18] M.H. Gross, G.S. Oliver, and R. Gatti, "Efficient Triangular Surface Approximations Using Wavelets and Quadtree Data Structures," In: IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics, vol. 2, no. 2, pp. 130-143, 1996.
- [19] P. Lindstrom and G. Turk, "Image-driven Simplification," In: ACM Trans. Graph, vol. 19, no. 3, pp. 204–241, 2000.
- [20] B. Fritzke, "A Growing Neural Gas Network Learns Topologies," In: Advances in Neural Information Processing Systems 7. MIT Press, pp. 625–632, 1995.
- [21] R. Álvarez, J.V. Noguera, L. Tortosa, and A. Zamora, "A Mesh Optimization Algorithm Based on Neural Networks," In: Information Sciences, vol. 177, no. 23, pp. 5347–5364, 2007.
- [22] R. Álvarez, J. Noguera, L. Tortosa, and A. Zamora, "GNG3D - A Software Tool for Mesh Optimization Based on Neural Networks," In: International Joint Conference on Neural Networks. IEEE Computer Society, pp. 4005–4012, 2006.
- [23] H. Lee and M.H. Kyung, "Parallel mesh simplification using embedded tree collapsing," The Visual Computer, vol. 32, no. 6-8, pp. 967-976, 2016.
- [24] A. Papageorgiou and N. Platis, "Triangular mesh simplification on the GPU," The Visual Computer, vol. 31, no. 2, pp. 235-244, 2015.
- [25] X. Liu, L. Lin, J. Wu, W. Wang, B. Yin, and C.CL. Wang, "Generating sparse self-supporting wireframe models for 3D printing using mesh simplification," Graphical Models, vol. 98, no. 4, pp. 14-23, 2018.
- [26] S. Tsuchie, "Mesh simplification accompanied by its denoising of scanned data," Engineering with Computers, vol. 35, no. 3, pp. 993-1008, 2019.
- [27] J. She, X. Gu, J. Tan, M. Tong, and C. Wang, "An appearance-preserving simplification method for complex 3D building models," Transactions in GIS, vol. 23, no. 2, pp. 275-293, 2019.

- [28] D. Salinas, F. Lafarge, and P. Alliez, "Structure-Aware Mesh Decimation," In Computer Graphics Forum, vol. 34, no. 6, pp. 211-227. 2015.
- [29] L. Asgharian and H. Ebrahimnezhad, "How many sample points are sufficient for 3D model surface representation and accurate mesh simplification?," Multimedia Tools and Applications, vol. 79, no. 39, pp.29595-29620, 2020.
- [30] F.A. Marvasti, "Reconstruction of two-dimensional signals from nonuniform samples or partial information," JOSA A, vol. 6, no. 1, pp. 52-55, 1989.
- [31] S. Curtis, S. Shitz, and A. Oppenheim, "Reconstruction of nonperiodic two-dimensional signals from zero crossings," IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing, vol. 35, no. 6, pp. 890-893, 1987.
- [32] P. Alliez, D. Cohen-Steiner, O. Devillers, B. Lévy, and M. Desbrun, "Anisotropic polygonal remeshing," In ACM Transactions on Graphics (TOG), vol. 22, no. 3, pp. 485-493. ACM, 2003.
- [33] H. Schreier, J.J. Orteu, and M.A. Sutton, "Image correlation for shape, motion and deformation measurements: Basic concepts, theory and applications," vol. 1. Boston, MA: Springer-Verlag US, 2009.
- [34] L.D. Cohen, "Multiple contour finding and perceptual grouping using minimal paths," Journal of Mathematical Imaging and Vision, vol. 14, no. 3, pp. 225-236, 2001.
- [35] G. Peyré and L.D. Cohen, "Geodesic remeshing using front propagation," International Journal of Computer Vision, vol. 69, no. 1, pp. 145, 2006.
- [36] G. Lavoué, "A multiscale metric for 3D mesh visual quality assessment," In Computer Graphics Forum, vol. 30, no. 5, pp. 1427-1437. Oxford, UK: Blackwell Publishing Ltd, 2011.
- [37] P. Cignoni, C. Rocchini, and R. Scopigno, "Metro: measuring error on simplified surfaces," In Computer Graphics Forum, vol. 17, no. 2, pp. 167-174. Oxford, UK and Boston, USA: Blackwell Publishers, 1998.
- [38] P. Cignoni, M. Callieri, M. Corsini, M. Dellepiane, F. Ganovelli, and G. Ranzuglia, "Meshlab: an open-source mesh processing tool," In Eurographics Italian chapter conference, vol. 2008, pp. 129-136, 2008.
- [39] A.M. Bronstein, M.M. Bronstein, and R. Kimmel, "Efficient computation of isometry-invariant distances between surfaces," SIAM Journal on Scientific Computing, vol. 28, no. 5, pp.1812-1836, 2006.
- [40] M. Garland, "Quadric-based polygonal surface simplification," Thesis (No. CMU-CS-99-105). Carnegie-Mellon University of Pittsburgh, School of Computer Science, 1999.
- [41] E. Ovreiu, "Accurate 3D mesh simplification," Doctoral dissertation, INSA de Lyon, 2012.
- [42] J. Wei and Y. Lou, "Feature preserving mesh simplification using feature sensitive metric," Journal of Computer Science and Technology, vol. 25, no. 3, pp.595-605, 2010.