

بهبود طراحی کنترل کننده بهینه فازی تعقیبی با معیار H_{∞} برای نیل به کیفیت بهتر عملکرد تعقیبی



دانشگاه صنعتی سهند

DOR:

[20.1001.1.23223146.1399.7.2.2.6](https://doi.org/10.1001.1.23223146.1399.7.2.2.6)

نشریه علمی پژوهشی در مهندسی برق

دوره ۷ - شماره ۲

پاییز و زمستان ۱۳۹۹

صفحات ۸۸ الی ۱۰۷

ISSN: 2322-3146

<http://journals.sut.ac.ir/jnsee>

سعید حقوقی اصفهانی^۱ حسین اکبری آشیانی^۲

^۱نویسنده مسئول، دانشیار گروه مهندسی برق، قدرت و کنترل، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه شهر کرد

hoghoughi@sku.ac.ir

^۲فارغ التحصیل کارشناسی ارشد گروه مهندسی برق، قدرت و کنترل، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه شهر کرد

hoseinakbary258@gmail.com

تاریخ دریافت مقاله: ۱۳۹۸/۰۸/۰۶ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۳۹۹/۱۱/۰۵

چکیده

واژه‌های کلیدی

این مطالعه مربوط به بهبود عملکرد کنترل کننده بهینه فازی تعقیبی با معیار برای سیستم‌های تاکاگی _ سوگنو می باشد. کنترل کننده فازی تعقیبی نه تنها سیستم حلقه بسته را پایدار می نماید، بلکه موجب می شود که نرم خطای تعقیب با معیار نسبت به کلیه سیگنال‌های خارجی با دامنه محدود، از مقدار مشخص داده شده ای کمتر باشد. یک کنترل کننده شش پارامتری تعقیبی برای هر زیر سیستم محلی خطی مدل تاکاگی _ سوگنو تعریف می شود. یک رهیافت مبتنی بر نامساویهای ماتریسی خطی منجر به یافتن پارامترهای هر کنترل کننده محلی می گردد. از آنجا که هر کنترل کننده محلی دارای شش پارامتر طراحی است، رهیافت ارائه شده در این مقاله منجر به انعطاف پذیری بیشتر و درجه محافظه کاری کمتری نسبت به روش‌های ارائه شده بر مبنای دو یا چهار پارامتر طراحی کنترلی می شود. علاوه بر این، در فرمول بندی این رهیافت، از هیچ فرض محدود کننده ای استفاده نمی شود. بررسی رهیافت ارائه شده در این مقاله بر روی سیستم پاندول معکوس، و مقایسه نتایج آن با رهیافت‌های دیگر، بهبود کیفیت کنترلی تعقیبی را نشان می دهد.

مدل فازی تاکاگی - سوگنو،
کنترل تعقیبی با معیار،
کنترل بهینه،
نامساویهای ماتریسی خطی،
جبران کننده توزیع شده موازی.



Sahand University
of Technology

DOR:

[20.1001.1.23223146.1399.7.2.2.6](https://doi.org/10.1001.1.23223146.1399.7.2.2.6)

Journal of Nonlinear
Systems in Electrical
Engineering

Vol.7, No.2

Autumn and Winter 2020

ISSN: 2322 – 3146

<http://journals.sut.ac.ir/jnsee>

Improvements on the Design of Optimal Fuzzy H_∞ Tracking Controller to Lead to the Better Tracking Performance

Said Houghoughi Esfahani¹ and Hosein Akbary Ashiany²

¹**Corresponding Author**, Associate Professor, Department of Electrical Engineering, Faculty of Engineering, Shahrekord University, Shahrekord, Iran, houghoughi@sku.ac.ir

²Graduate Master Degree Student, Department of Electrical Engineering, Faculty of Engineering, Shahrekord University, Shahrekord, Iran, hoseinakbary258@gmail.com

ABSTRACT

Keywords

Nonlinear systems,
Tracking control,
Generalized tracking control
law.

This paper is concerned with the problem of improvement of fuzzy H_∞ tracking controller for nonlinear systems modeled by T-S fuzzy scheme. The fuzzy tracking controller not only stabilizes the closed-loop system, but also results in the H_∞ tracking error norm to all the bounded external signals to be less than some given value. A new tracking control law is proposed for each linear local subsystem of T-S fuzzy model. A Linear Matrix Inequalities (LMIs) approach is proposed to find all the parameters of the control laws. The proposed approach results in a noticeable improved tracking performance with respect to the existing approaches. An investigation of the tracking performance of the proposed approach on the inverted pendulum system, in comparison with the other approaches, shows the improvement.

۱- مقدمه

مسئله پایدار سازی و کنترل سیستم‌های غیر خطی، توسط بسیاری از محققین سیستم‌های کنترل مورد بررسی قرار گرفته است. در این زمینه، یکی از روش‌های بسیار موثر، مدل‌سازی سیستم غیر خطی اولیه با روش تقریب تاکاگی- سوگنو می باشد. در این روش، سیستم غیر خطی با مجموعه ای از زیر سیستم‌های محلی خطی تقریب زده می شود. هر زیرسیستم محلی خطی با یک قاعده اگر- آنگاه توصیف می شود. در مرحله بعد، با تعمیم روشهای کنترلی سیستمهای خطی به زیر سیستمهای محلی خطی، و با در نظر گرفتن اندرکنش‌های این زیر سیستم‌ها با یکدیگر، امکان طراحی کنترل‌کننده‌های مختلف فازی بوجود می آید. یک دسته مهم با چنین ساختار کنترلی به نام جبران‌کننده‌های موازی توزیع شده نامیده می شوند.

از جمله معیارهای مهم کنترلی مورد نظر برای سیستم‌های غیر خطی، مسئله کنترل تعقیبی است. در این مساله کنترلی، کنترل-کننده نهایی فازی باید انچنان طراحی شود که نه تنها سیستم حلقه بسته را پایدار کند، بلکه خطای تعقیبی بین حالت‌های سیستم تحت کنترل و حالت‌های مدل مینا را با یک معیار مشخص کنترلی، حداقل نماید. مساله کنترلی تعقیبی کاربردهای عملی بسیار زیادی دارد. برای نمونه، این مساله کنترلی در سالهای اخیر، در مورد کنترل تعقیبی سرعت موتورهای سنکرون حاوی آهنرباهای دائمی نصب شده بر سطح آنها [۱]، واردکننده‌های نیروی پیزو الکتریکی با کاربرد در ابعاد نانو [۲-۳]، فضاپیماهای انعطاف پذیر [۴] و کنترل مسیر حرکت خودروهای خود مختار [۵] بطور عملی پیاده سازی شده است.

در بین معیارهای مختلف کنترل تعقیبی، کنترل فازی تعقیبی با معیار H_{∞} اهمیت خاص خود را دارد. در این معیار کنترلی، کنترل‌کننده فازی علاوه بر پایدارسازی سیستم حلقه بسته، ضمانت می کند که اندازه نرم معیار H_{∞} خطای سیگنال تعقیبی نسبت به کلیه سیگنال‌های خارجی از حد مشخص داده شده ای کمتر باشد. از لحاظ تئوری، این مساله توسط محققین بسیاری با بکارگیری روش‌های متفاوتی، مورد بررسی قرار گرفته است. برای نمونه، محققین از رهیافت فیدبک خطی ساز [۶-۷]، از رهیافت کنترل تطبیقی و یا کنترل تطبیقی به همراه مودهای لغزشی [۸-۱۱] و نیز کنترل‌کننده‌های دو مرحله ای بر مبنای مشاهده گرها [۱۲-۱۳] استفاده نموده اند.

در تمامی روش‌های بالا، از مدل مشاهده گر- فیدبک حالت مشاهده شده، برای ساختار هر کنترل‌کننده محلی استفاده شده است. اما این ساختار کنترلی، تنها زیر مجموعه ای از حالت کنترل با فیدبک خروجی بشمار می رود. در حالت کنترل‌کننده بر مبنای ساختار مشاهده گر- فیدبک حات مشاهده شده، پارامترهای طراحی تنها ۲ پارامتر هستند، بهره مشاهده گر و بهره فیدبک حالت مشاهده شده. به عنوان نمونه مرجع [۴] را ببینید. برای حالت کنترل تعقیبی در مرجع [۱۴] یک کنترل‌کننده جامع تر ارائه شده است. این کنترل‌کننده دارای چهار پارامتر طراحی می باشد نتایج [۱۴] نشان‌دهنده این مطلب است که این ساختار کنترلی تعقیبی منجر به انعطاف پذیری بیشتر و محافظه کاری کم‌تر در حل مساله کنترلی فازی تعقیبی با معیار H_{∞} نسبت به روش سنتی بر مبنای مشاهده گر، می شود. در این مقاله، ساختار کنترلی تعقیبی هر کنترل‌کننده محلی به شش پارامتر طراحی ارتقا یافته است. به نظر می‌رسد که این ساختار، ارائه دهنده یک کنترل‌کننده کامل تعقیبی باشد، که از لحاظ عملکرد کنترلی تعقیبی با معیار H_{∞} نسبت به کنترل‌کننده ای بر مبنای مشاهده گر [۴] و نیز کنترل‌کننده اولیه ارائه شده در [۱۴] کارایی بهتری دارد.

در ابتدای این مقاله فرمول بندی مساله کنترلی فازی تعقیبی با معیار H_{∞} با بکارگیری کنترل کننده محلی شش پارامتری، به صورت یک دسته نامساوی های ماتریسی غیر خطی بیان می شود. سپس با بکارگیری مناسب یک مجموعه پارامترهای کمکی که جانشین پارامترهای کنترل کننده اولیه می شوند، نامساوی های ماتریسی غیر خطی به حالت ساده خطی تبدیل می گردند. در تضاد با روش های ارائه شده در مراجع موجود، در این تبدیل، از هیچ فرض محدود کننده ای استفاده نمی شود. می توان نشان داد که وجود یک پاسخ برای مساله کنترلی فازی تعقیبی با معیار H_{∞} معادل امکان پذیری یک دسته نامساوی های ماتریسی خطی است. در گام بعد با حل یک مسئله بهینه محذب، کنترل کننده بهینه بدست می آید. کنترل کننده بهینه، کنترل کننده ای است که منجر به حداقل نمودن مقدار نورم برای معیار H_{∞} در کنترل فازی تعقیبی می شود. در گام آخر، نتایج این مقاله با ۲ مرجع به روز از جنبه های متفاوت مقایسه می شوند. این مقایسه نشان دهنده عملکرد تعقیبی بهبود یافته کنترل کننده ارائه شده در این مقاله می باشد.

مطالب این مقاله به فرم زیر ارائه می شوند. در بخش اول، مفاهیم اولیه مدل تاکاگی- سوگنو به همراه معرفی ساختار کنترل کننده جدید محلی خطی شش پارامتری آمده است. سپس با ترکیب کنترل کننده و زیرسیستم محلی خطی سیستم تاکاگی- سوگنو، سیستم حلقه بسته بدست می آید. در ادامه این بخش، کنترل کننده فازی تعقیبی با معیار H_{∞} بر روی سیستم حلقه بسته اعمال شده و فرمول بندی اولیه این مساله بدست می آید. این فرمول بندی بر مبنای امکان پذیری یک دسته نامساوی های ماتریسی غیر خطی بیان شده است. بخش دوم اختصاص به ارائه نتایج اصلی دارد. این نتایج که در قالب یک قضیه و چند نکته بیان می شوند، ارائه یک دسته معادل نامساوی های ماتریسی خطی به عنوان جانشین نامساوی های ماتریسی غیر خطی اولیه است. برای هر مقدار نرم داده شده معیار H_{∞} ، اگر نامساوی های ماتریسی خطی بدست آمده، دارای جواب باشند، یک کنترل کننده فازی تعقیبی شش پارامتری بدست می آید. سپس بیان مساله کنترل بهینه متناظر با آن ارائه می شود. در قسمت نهایی این بخش، به نحوه محاسبه یک دسته ضرایب استاتیکی که منجر به صفر شدن خطای تعقیب برای ورودیهای DC می باشد، پرداخته می شود. یک بلوک دیاگرام برای نمایش تصویری مکانیزم کنترل کننده فازی تعقیبی نهایی ترسیم شده است. بخش چهارم به بررسی یک سیستم نمونه اختصاص دارد. سیستم نمونه، مسئله کنترلی تعقیبی برای پاندول معکوس می باشد. نتایج حاصله در این مقاله با نتایج موجود مقایسه شده و کنترل فازی تعقیبی برای این سیستم از جنبه های مختلف دیگری نیز مورد بررسی قرار می گیرد.

۲- فرمول بندی مساله

مدل دینامیکی فازی پیوسته در زمان T-S، اولین بار توسط تاکاگی و سوگنو برای نمایش یک سیستم غیر خطی به صورت مجموعه ای از زیرسیستم های محلی خطی توسط توابع عضویت مربوط به هر زیر سیستم، ابداع شده است. هر زیر سیستم محلی خطی توسط یک قانون اگر _ آنگاه بیان می شود. بیان زیر سیستم خطی محلی را بصورت (۱) را در نظر بگیرید:

بخش دینامیکی قانون أم دستگاه:

If $\theta_1(t) \in \delta_{i_1}$ and ... $\theta_r(t) \in \delta_{i_r}$, then

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_i \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_{i_1} \mathbf{u}(t) + \mathbf{B}_{i_2} \mathbf{w}(t), \quad (1-f)$$

بخش خروجی قانون آم دستگاه:

If $\theta_1(t) \in \delta_{i_1}$ and ... $\theta_r(t) \in \delta_{i_r}$, then

$$y(t) = C_{1i} x(t) + C_{2i} v(t) \quad (1-b)$$

در رابطه (۱)، $x(t) \in \mathbf{R}^n$ بردار حالت سیستم، $u(t) \in \mathbf{R}^m$ بردار ورودی کنترل، $w(t) \in \mathbf{R}^w$ بردار اختلال در ورودی سیستم با دامنه محدود، $y(t) \in \mathbf{R}^1$ بردار خروجی اندازه گیری شده سیستم و $v(t) \in \mathbf{R}^v$ بردار نویز اندازه گیری با دامنه محدود، می باشند. δ_{ij} بیانگر مجموعه فازی است. قانون اگر _ آنگاه آم در واقع مدل خطی زیرسیستم محلی آم می باشد. $\theta_1(t), \dots, \theta_r(t)$ متغیرهای زبانی هستند. $A_i \in \mathbf{R}^{n \times n}$ ، $B_{1i} \in \mathbf{R}^{n \times m}$ ، $B_{2i} \in \mathbf{R}^{n \times w}$ ، $C_{1i} \in \mathbf{R}^{1 \times n}$ و $C_{2i} \in \mathbf{R}^{1 \times v}$ ماتریس‌های معادلات حالت زیر سیستم خطی محلی آم می باشند و متغیر r تعداد قوانین فازی را بیان می کند. مدل تاکاگی _ سوگنو کامل سیستم غیر خطی به صورت رابطه (۲) بیان می شود:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(\theta(t)) [A_i x(t) + B_{1i} u(t) + B_{2i} w(t)] & (2-a) \\ y(t) = \sum_{i=1}^r h_i(\theta(t)) [C_{1i} x(t) + C_{2i} v(t)] & (2-b) \end{cases}$$

در مدل (۲):

$$\mu_i(\theta(t)) = \prod_{j=1}^r \delta_{ij}(\theta_j(t)), \quad h_i(\theta(t)) = \frac{\mu_i(\theta(t))}{\sum_{i=1}^r \mu_i(\theta(t))}, \quad h_i(\theta(t)) \geq 0, \quad \sum_{i=1}^r h_i(\theta(t)) = 1. \quad (3)$$

متغیر $\delta_{ij}(\theta_j(t))$ بیانگر درجه نسبی تعلق $\theta_j(t)$ به δ_{ij} است.

در این قسمت، یک مدل مرجع برای ارائه حالت‌های مرجع که بایستی توسط حالت‌های سیستم (۲) دنبال شوند به فرم (۴) در نظر گرفته می شود:

$$\dot{x}_r(t) = A_r x_r(t) + B_r r(t) \quad (4)$$

در معادله حالت (۴)، $x_r(t) \in \mathbf{R}^n$ بردار حالت مرجع، $A_r \in \mathbf{R}^{n \times n}$ یک ماتریس پایدار مجانبی و $r(t) \in \mathbf{R}^n$ یک سیگنال با دامنه محدود دلخواه می باشد. در اینجا فرض می شود که بردار $x_r(t)$ بیانگر یک مسیر مطلوب مرجع است که بردار $x(t)$ در (۲) باید آن را تعقیب نماید. مسئله کنترل تعقیبی با معیار H_{∞} به صورت زیر قابل بیان است:

$$\int_0^{t_f} \{ [x(t) - x_r(t)]^T Q [x(t) - x_r(t)] \} dt \leq \gamma^2 \int_0^{t_f} \tilde{w}^T(t) \tilde{w}(t) dt, \quad (5)$$

در رابطه (۵) منظور از $\tilde{w}(t) = [w^T(t), v^T(t), r^T(t)]^T$ ، اختلال خارجی $w(t)$ ، نویز اندازه گیری $v(t)$ و ورودی مرجع $r(t)$ می باشند. Q یک ماتریس وزنی مثبت نیمه _ معین و t_f زمان نهایی کنترل و γ یک مقدار نرم تضعیف اثر سیگنال‌های

خارجی بر روی خطای تعقیب است. برای نیل به دستیابی به چنین عملکرد کنترلی فازی تعقیبی، کنترل کننده به فرم جبران توزیع شده موازی ارائه می گردد:

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(\boldsymbol{\theta}(t))h_j(\boldsymbol{\theta}(t))[A_c^{ij}\hat{\mathbf{x}}(t)] + \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(\boldsymbol{\theta}(t))h_j(\boldsymbol{\theta}(t))[F_c^{ij}\mathbf{x}_r(t)] \\ &+ \sum_{i=1}^r h_i(\boldsymbol{\theta}(t))[B_c^i\mathbf{y}(t)], \\ \mathbf{u}(t) &= \sum_{j=1}^r h_j(\boldsymbol{\theta}(t))[C_c^j\hat{\mathbf{x}}(t)] + \sum_{j=1}^r h_j(\boldsymbol{\theta}(t))[G_c^j\mathbf{x}_r(t)] + D_c\mathbf{y}(t), \\ i, j &= 1, 2, \dots, r. \end{aligned} \right. \quad (۶)$$

قانون کنترلی (۶)، در هر زیر سیستم محلی خطی، دارای شش پارامتر طراحی است. این کنترل کننده حاوی کاملترین فرم کنترل مناسب برای مسائل تعقیبی می باشد. به عنوان نمونه، در مراجع مذکور اخیر مثل [۴]، هر کنترل کننده محلی بر مبنای طراحی به فرم مشاهده گر حالت _ فیدبک حالت مشاهده شده، می باشد. لذا در این رهیافت تعداد پارامترهای طراحی کنترل کننده دو می باشد. این دو پارامتر، بهره مشاهده گر و بهره فیدبک حالت مشاهده شده، می باشند. رهیافت [۱۴] دارای چهار پارامتر طراحی در هر کنترل کننده محلی است و لذا از رهیافت [۱۴] دارای محافظه کاری کمتری است. حال با در اختیار داشتن شش پارامتر طراحی در هر کنترل کننده محلی، بطور طبیعی انتظار می رود که بکار گیری این کنترل کننده به نتایج بهتری نسبت به فرم اولیه آن در [۱۴] و نیز نسبت به سایر کنترل کننده های ارائه شده در مراجع دیگر که بر پایه مکانیزم مشاهده گر حالت _ فیدبک حالت مشاهده شده معرفی شده اند، منجر شود. در بخش ۴ این مقاله، چنین مقایسه ای به فرم عددی انجام خواهد شد.

حال اگر کنترل کننده (۶) را با سیستم معادلات حالت مدل تاکاگی _ سوگنو (۲) ترکیب نماییم، به سیستم حلقه بسته (۷) خواهیم رسید. برای سادگی در بیان فرمول های ریاضی از عبارت h_i به جای $h_i(\boldsymbol{\theta}(t))$ استفاده می کنیم.

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i h_j \{ \tilde{\mathbf{A}}_{ij} \tilde{\mathbf{x}}(t) + \tilde{\mathbf{G}}_{ij} \tilde{\mathbf{w}}(t) \} \quad (۷)$$

$$\tilde{\mathbf{G}}_{ij} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{2i} & \mathbf{B}_{1i} D_c C_{2j} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_c^i C_{2j} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{B}_r \end{bmatrix} \quad \tilde{\mathbf{A}}_{ij} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_i + \mathbf{B}_{1i} D_c C_{1j} & \mathbf{B}_{1i} C_c^j & \mathbf{B}_{1i} G_c^j \\ \mathbf{B}_c^i C_{1j} & \mathbf{A}_c^{ij} & \mathbf{F}_c^{ij} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_r \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \hat{\mathbf{x}}(t) \\ \mathbf{x}_r(t) \end{bmatrix},$$

معیار H_{∞} کنترل تعقیبی بر روی این سیستم حلقه بسته به فرم (۸) قابل بیان است:

$$\int_0^{t_f} \{ [\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_r(t)]^T \mathbf{Q} [\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_r(t)] \} dt = \int_0^{t_f} \tilde{\mathbf{x}}^T(t) \tilde{\mathbf{Q}} \tilde{\mathbf{x}}(t) dt \leq \gamma^2 \int_0^{t_f} \tilde{\mathbf{w}}^T(t) \tilde{\mathbf{w}}(t) dt \quad (۸)$$

$$\tilde{\mathbf{Q}} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{0} & -\mathbf{Q} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{Q} & \mathbf{0} & \mathbf{Q} \end{bmatrix}.$$

اگر رابطه (۸) برای یک مقدار γ داده شده برقرار باشد، در واقع نشان دهنده درجه نرم تضعیف اثر سیگنال های خارجی دلخواه بر روی خطای وزن دار تعقیبی است. حال لم ۱ که یک نتیجه استاندارد در تئوری کنترلی فازی تعقیبی با معیار H_∞ می باشد، ارائه می گردد:

لم ۱: کنترل کننده (۶) یک کنترل کننده فیدبک خروجی فازی تعقیبی با معیار H_∞ است و رابطه (۸) را برقرار می کند، اگر ماتریس مثبت معین \tilde{P} وجود داشته باشد که تمامی نامساوی های غیرخطی (۹) را برای $i, j = 1, 2, \dots, r$ برقرار نماید:

$$\Omega^{ij} = \begin{bmatrix} \tilde{P}\tilde{A}_{ij} + \tilde{A}_{ij}^T\tilde{P} + \tilde{Q} & \tilde{P}\tilde{G}_{ij} \\ \tilde{G}_{ij}^T\tilde{P} & -\gamma^2\mathbf{I} \end{bmatrix} < \mathbf{0}, \quad (9)$$

اگر (۹) برقرار شود، آنگاه

$$\int_0^{t_f} \tilde{x}^T(t)\tilde{Q}\tilde{x}(t)dt \leq \tilde{x}^T(0)\tilde{P}\tilde{x}(0) + \gamma^2 \int_0^{t_f} \tilde{w}^T(t)\tilde{w}(t)dt$$

خواهد بود.

نکته ۱: نامساوی ماتریسی غیرخطی (۹) با استفاده از لم مکمل شور به فرم (۱۰) برای $i, j = 1, 2, \dots, r$ تبدیل می شود:

$$\Omega^{ij} = \begin{bmatrix} \tilde{P}\tilde{A}_{ij} + \tilde{A}_{ij}^T\tilde{P} & \tilde{P}\tilde{G}_{ij} & \tilde{Q}^{1/2} \\ \tilde{G}_{ij}^T\tilde{P} & -\gamma^2\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \tilde{Q}^{T/2} & \mathbf{0} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} < \mathbf{0}, \quad (10)$$

کنترل کننده بهینه با ساختار (۶) از جواب مساله بهینه سازی غیر محدب (۱۱) حاصل می گردد.

$$\text{Min}_{\tilde{P}} \gamma$$

(۱۱)

$$\text{Subject to } \tilde{P} > \mathbf{0}$$

دربخش ۳ یک رهیافت محدب بر مبنای نامساوی های ماتریسی خطی برای طراحی کنترل کننده بهینه ارائه می گردد.

۳- طراحی کنترل کننده بهینه فازی تعقیبی با معیار H_∞

قضیه ۱: مدل تاکاگی - سوگنو (T-S) (۲)، مدل مرجع (۴) و عملکرد تعقیبی با معیار H_∞ (۸) را در نظر بگیرید: فرض کنید که ماتریسهای مثبت معین $\mathbf{R}, \mathbf{S}, \mathbf{X}$ و ماتریسهای نامعین $\bar{A}_c^{ij}, \bar{B}_c^i, \bar{C}_c^i, \bar{D}_c^i, \bar{G}_c^i, \bar{F}_c^{ij}$ برای $1 \leq i, j \leq r$ وجود داشته باشند که نامساوی های ماتریسی خطی (۱۴) - (۱۲) را برای یک مقدار داده شده γ در معیار عملکرد تعقیبی H_∞ (۸)، برقرار سازند، آنگاه قانون کنترلی فازی (۶) که پارامترهای آن از مجموعه (۱۹) بدست می آیند، یک قانون کنترلی فازی تعقیبی با معیار H_∞ خواهد بود. نامساوی های ماتریسی (۱۴) - (۱۲) به صورت زیر هستند:

$$\text{for } 1 \leq i \leq r \quad \psi^i < \mathbf{0} \quad (12)$$

$$\Psi^i = \begin{bmatrix} \Psi_{11}^i & \Psi_{12}^i & \Psi_{13}^i \\ * & -\gamma^2 \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ * & * & -\mathbf{I} \end{bmatrix}$$

که در آن:

$$\Psi_{11}^i = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & Z_{13} \\ * & Z_{22} & Z_{23} \\ * & * & Z_{33} \end{bmatrix}$$

$$Z_{11} = (\mathbf{A}_i \mathbf{R} + \mathbf{B}_{1i} \bar{\mathbf{C}}_c^i) + (\mathbf{A}_i \mathbf{R} + \mathbf{B}_{1i} \bar{\mathbf{C}}_c^i)^T, Z_{12} = \mathbf{A}_i + \mathbf{B}_{1i} \bar{\mathbf{D}}_c \mathbf{C}_{1i} + \bar{\mathbf{A}}_c^{iiT}$$

$$Z_{13} = \mathbf{B}_{1i} \bar{\mathbf{G}}_c^i, Z_{22} = (\mathbf{S} \mathbf{A}_i + \bar{\mathbf{B}}_c^i \mathbf{C}_{1i}) + (\mathbf{S} \mathbf{A}_i + \bar{\mathbf{B}}_c^i \mathbf{C}_{1i})^T, Z_{23} = \bar{\mathbf{F}}_c^{ij}, Z_{33} = \mathbf{A}_r \mathbf{X} + \mathbf{X} \mathbf{A}_r^T$$

$$\Psi_{12}^i = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{2i} & \mathbf{B}_{1i} \bar{\mathbf{D}}_c \mathbf{C}_{2i} & \mathbf{0} \\ \mathbf{S} \mathbf{B}_{2i} & \bar{\mathbf{B}}_c^i \mathbf{C}_{2i} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{B}_r \end{bmatrix}, \Psi_{13}^i = \begin{bmatrix} \mathbf{R} \mathbf{Q}^{1/2} \\ \mathbf{Q}^{1/2} \\ -\mathbf{X} \mathbf{Q}^{1/2} \end{bmatrix}.$$

$$\text{for } 1 \leq i \neq j \leq r \quad \frac{2}{r-1} \Psi^i + \Pi^{ij} + \Pi^{ji} < \mathbf{0} \quad (13)$$

که در آن:

$$\Pi^{ij} = \begin{bmatrix} \Pi_{11}^{ij} & \Pi_{12}^{ij} & \Pi_{13}^{ij} \\ * & -\gamma^2 \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ * & * & -\mathbf{I} \end{bmatrix}$$

$$\Pi_{11}^{ij} = \begin{bmatrix} V_{11} & V_{12} & V_{13} \\ * & V_{22} & V_{23} \\ * & * & V_{33} \end{bmatrix}$$

$$V_{13} = \mathbf{B}_{1i} \bar{\mathbf{G}}_c^j, V_{12} = \mathbf{A}_i + \mathbf{B}_{1i} \bar{\mathbf{D}}_c \mathbf{C}_{1j} + \bar{\mathbf{A}}_c^{ijT}, V_{11} = (\mathbf{A}_i \mathbf{R} + \mathbf{B}_{1i} \bar{\mathbf{C}}_c^j) + (\mathbf{A}_i \mathbf{R} + \mathbf{B}_{1i} \bar{\mathbf{C}}_c^j)^T$$

$$V_{33} = \mathbf{A}_r \mathbf{X} + \mathbf{X} \mathbf{A}_r^T, V_{23} = \bar{\mathbf{F}}_c^{ij}, V_{22} = (\mathbf{S} \mathbf{A}_i + \bar{\mathbf{B}}_c^i \mathbf{C}_{1j}) + (\mathbf{S} \mathbf{A}_i + \bar{\mathbf{B}}_c^i \mathbf{C}_{1j})^T$$

$$\Pi_{12}^{ij} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{2i} & \mathbf{B}_{1i} \bar{\mathbf{D}}_c \mathbf{C}_{2j} & \mathbf{0} \\ \mathbf{S} \mathbf{B}_{2i} & \bar{\mathbf{B}}_c^i \mathbf{C}_{2j} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{B}_r \end{bmatrix}, \Pi_{13}^{ij} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} \mathbf{Q}^{1/2} \\ \mathbf{Q}^{1/2} \\ -\mathbf{X} \mathbf{Q}^{1/2} \end{bmatrix}.$$

و

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{I} & \mathbf{S} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{X} \end{bmatrix} > \mathbf{0} \quad (14)$$

اثبات: با استفاده از نتایج قضیه انعطاف پذیری در [۱۵] نامساوی‌های ماتریسی غیر خطی (۱۰) به صورت زیر معادلسازی می‌شوند:

$$\Omega^{ii} < 0, \quad i=1,2,\dots,r \quad (۱۵-الف)$$

$$\frac{2}{r-1} \Omega^{ii} + \Omega^{ij} + \Omega^{ji} < 0, \quad 1 \leq i \neq j \leq r \quad (۱۵-ب)$$

در ابتدا نامساوی‌های ماتریسی غیر خطی (۱۵-الف) را در نظر بگیرید. در این قسمت، هدف ما تبدیل این دسته نامساوی‌های ماتریسی غیر خطی به دسته نامساوی‌های ماتریسی خطی (۱۲) می‌باشد. برای نیل به این مقصود، ماتریسهای $\tilde{\mathbf{P}}$ و $\tilde{\mathbf{P}}^{-1}$ را به صورت زیر قسمت بندی می‌نماییم:

$$\tilde{\mathbf{P}} = \begin{bmatrix} \mathbf{S} & \mathbf{N} & \mathbf{0} \\ \mathbf{N}^T & \mathbf{V} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{P}_r \end{bmatrix}, \tilde{\mathbf{P}}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^T & \mathbf{U} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{X} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}, \mathbf{S}, \mathbf{M}, \mathbf{N}, \mathbf{U}, \mathbf{V}, \mathbf{P}_r, \mathbf{X} \in \mathbf{R}^{n \times n} \quad (۱۶)$$

از تساوی $\tilde{\mathbf{P}}\tilde{\mathbf{P}}^{-1} = \mathbf{I}$ معادله (۱۷) حاصل می‌شود:

$$\mathbf{MN}^T = \mathbf{I} - \mathbf{RS}, \quad \mathbf{P}_r \mathbf{X} = \mathbf{I}. \quad (۱۷)$$

حال دو ماتریس کمکی زیر را تعریف می‌کنیم:

$$\varphi_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{X} \end{bmatrix}, \quad \varphi_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{S} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{N}^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{P}}\varphi_1 = \varphi_2 \quad (۱۸)$$

در این قسمت یک مجموعه از متغیرهای کمکی جدید را که جانشین پارامترهای کنترل‌کننده اولیه در (۶) می‌شوند، در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} \bar{\mathbf{A}}_c^{ij} = \mathbf{S}(\mathbf{A}_i + \mathbf{B}_{1i} \mathbf{D}_c \mathbf{C}_{1j}) \mathbf{R} + \mathbf{N} \mathbf{B}_c^i \mathbf{C}_{1j} \mathbf{R} & (۱۹-الف) \\ + \mathbf{S} \mathbf{B}_i \mathbf{C}_c^j \mathbf{M}^T + \mathbf{N} \mathbf{A}_c^{ij} \mathbf{M}^T & \\ \bar{\mathbf{B}}_c^j = \mathbf{N} \mathbf{B}_c^j + \mathbf{S} \mathbf{B}_{1i} \mathbf{D}_c & (۱۹-ب) \\ \bar{\mathbf{C}}_c^i = \mathbf{C}_c^i \mathbf{M}^T + \mathbf{D}_c \mathbf{C}_{1i} \mathbf{R} & (۱۹-پ) \\ \bar{\mathbf{D}}_c = \mathbf{D}_c & (۱۹-ت) \\ \bar{\mathbf{G}}_c^i = \mathbf{G}_c^i \mathbf{X} & (۱۹-ث) \\ \bar{\mathbf{F}}_c^{ij} = \mathbf{N} \mathbf{F}_c^{ij} \mathbf{X} + \mathbf{S} \mathbf{B}_{1i} \mathbf{G}_c^j \mathbf{X} & (۱۹-ج) \end{cases}$$

حال ماتریس زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\mathbf{T}_1 = \text{diag}\{\varphi_1, \mathbf{I}, \mathbf{I}\}$$

اگر نامساوی های ماتریسی غیر خطی (۱۵- الف) را از سمت چپ در (T_1^T) و از سمت راست در (T_1) ضرب کنیم و سپس از دسته متغیرهای جایگزین (۱۹) بهره ببریم، آنگاه نامساوی های ماتریسی خطی (۱۲) بدست می آیند. اگر به همین روال در مورد دسته نامساوی های ماتریسی غیر خطی (۱۵- ب) عمل کنیم، به فرم خطی (۱۳) تبدیل می شوند. در نهایت از رابطه زیر داریم:

$$\varphi_1^T \tilde{P} \varphi_1 = \varphi_1^T \varphi_2 = \begin{bmatrix} R & I & 0 \\ I & S & 0 \\ 0 & 0 & X \end{bmatrix} > 0.$$

از آنجا که ماتریس \tilde{P} مثبت معین می باشد و در ضمن ماتریس φ_1 معکوس پذیر است، آنگاه نامساوی ماتریسی خطی (۱۴) حاصل می شود. حال اگر حل نامساوی های ماتریسی خطی (۱۴)-(۱۲) امکان پذیر باشند، با معلوم بودن ماتریس های مثبت معین R, S, X و بدست آوردن دو ماتریس M, N از رابطه (۱۷) و با در اختیار داشتن ماتریس های $\bar{A}_c^{ij}, \bar{B}_c^i, \bar{C}_c^i, \bar{D}_c, \bar{G}_c, \bar{F}_c^{ij}$ پارامترهای اولیه کنترل کننده شش پارامتری (۶) یعنی $A_c^{ij}, B_c^i, C_c^i, D_c, G_c^i, F_c^{ij}$ بطور یکتا از رابطه (۱۹) حاصل می شوند. با این کار، اثبات قضیه به اتمام می رسد.

نکته ۲: هدف بعدی در این مطالعه بدست آوردن کنترل بهینه فازی تعقیبی با معیار H_{∞} است. کنترل کننده بهینه، در واقع کنترل کننده ای است که حداقل مقدار برای اندازه γ را در معیار H_{∞} منجر شود. خوشبختانه این مساله حداقل سازی با استفاده از نتایج قضیه ۱، از فرم غیر محدب (۱۱) به فرم محدب زیر قابل بیان می باشد:

$$\text{Min } \gamma$$

$$\text{Subject to: (12)-(14)} \quad (20)$$

نکته ۳: در کلیه مراجعی که بر مبنای رهیافت مشاهده گر حالت _ فیدبک حالت مشاهده شده به مساله طراحی کنترل کننده فازی تعقیبی با معیار H_{∞} برای سیستمهای T-S پرداخته اند، هر کنترل کننده محلی تنها از دو پارامتر طراحی تشکیل می شود و تنها با اعمال فرض های محدود کننده ای، دسته نامساوی های ماتریسی غیر خطی (۱۵) به یک دسته نامساوی های ماتریسی خطی تبدیل می شوند. همینطور در مرجع [۱۴] کنترل کننده محلی از تنها چهار پارامتر کنترلی تشکیل شده است. در حالیکه در این مطالعه، کنترل کننده (۶) از شش پارامتر طراحی کنترلی تشکیل شده است. لذا انتظار می رود که کنترل کننده ارائه شده در این مطالعه، به بزرگتر شدن فضای وجود جواب و در عین حال به کمتر شدن مقدار γ بهینه منجر شود.

نکته ۴: برای تکمیل روند طراحی کنترل کننده که در قضیه ۱ ارائه شد، یک دسته پارامترهای ایستا (استاتیکی) را برای به صفر رساندن خطای تعقیبی در حالت ماندگار برای ورودیهای DC اضافه می کنیم. رهیافت زیر طراحی سیستم کنترلی فازی تعقیبی با معیار H_{∞} را کامل می نماید. از آنجا که هدف نهایی ما صفر شدن خطای تعقیب در حالت ماندگار برای ورودیهای DC یا مربعی با فرکانس پایین است، عبارت (۲۱) را در نظر می گیریم:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{x_k(t)}{x_{rk}(t)} = 1, \text{ for } k = 1, \dots, n \quad (21)$$

در رابطه (۲۱)، $X_k(t)$ و $X_{rk}(t)$ به ترتیب معرف مولفه k -ام بردار حالت سیستم و بردار حالت سیستم مرجع می باشند. رابطه (۲۱) در حوزه زمان است بیان دیگر آن در حوزه فرکانس به صورت رابطه (۲۲) خواهد بود:

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{X_k(s)}{X_{rk}(s)} = 1, \text{ for } k = 1, \dots, n \quad (22)$$

در رابطه (۲۲)، $X_k(s)$ و $X_{rk}(s)$ به ترتیب معرف تبدیل لاپلاس $X_k(t)$ و $X_{rk}(t)$ هستند. اگر سیگنال $r(t)$ در رابطه (۴) یک ورودی اسکالر فرض شود، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 0} \frac{X_k(s)}{X_{rk}(s)} &= \lim_{s \rightarrow 0} \left(\frac{X_k(s)}{R(s)} \right) \times \left(\frac{R(s)}{X_{rk}(s)} \right) = \lim_{s \rightarrow 0} \left(\frac{X_k(s)}{R(s)} \right) \times \left(\frac{X_{rk}(s)}{R(s)} \right)^{-1} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\bar{C}_k (sI - \tilde{A}_{ij})^{-1} \bar{B}}{C_{rk} (sI - A_r)^{-1} B_r}, \text{ for } k = 1, \dots, n \end{aligned}$$

پارامترهای جدید در فرمول بالا به صورت زیر تعریف می شوند:

$$\bar{C}_k \in \mathbf{R}^{1 \times 3n}, \bar{C}_k(i) = 0, \text{ for } i = 1, \dots, 3n \text{ and } i \neq k, \bar{C}_k(i) = 1, \text{ for } i = k.$$

$$\bar{B} \in \mathbf{R}^{3n \times 1}, \bar{B}^T = [0, 0, \dots, B_r],$$

$$C_{rk} \in \mathbf{R}^{1 \times n}, C_{rk}(i) = 0, \text{ for } i = 1, \dots, n \text{ and } i \neq k, C_{rk}(i) = 1, \text{ for } i = k$$

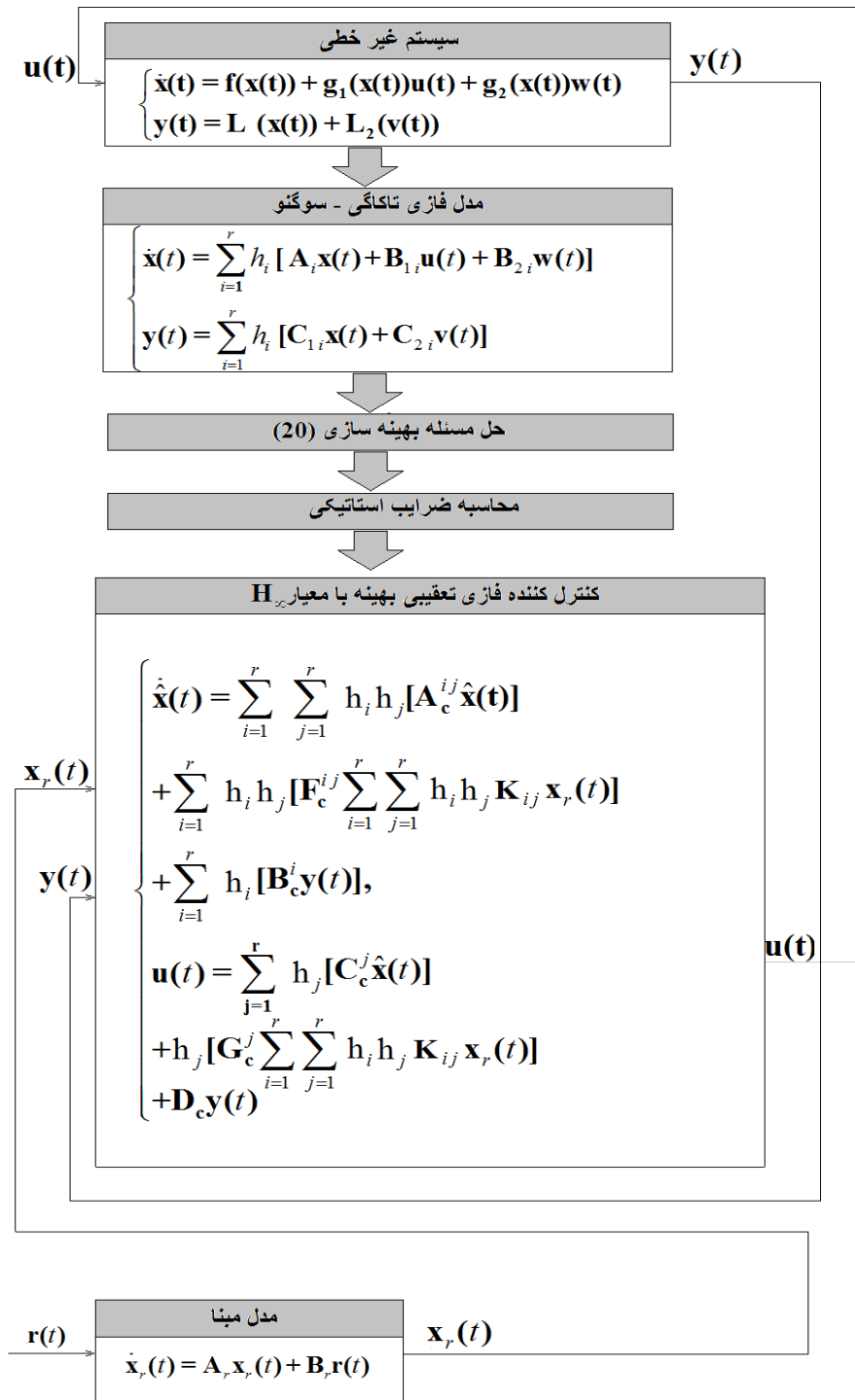
حال بهره های استاتیکی مورد نظر از فرمول (۲۳) قابل تعریف خواهند بود:

$$K_{ij}^k = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{C_{rk} (sI - A_r)^{-1} B_r}{\bar{C}_k (sI - \tilde{A}_{ij})^{-1} \bar{B}}, \text{ for } k = 1, \dots, n \quad (23)$$

با محاسبه این بهره های استاتیکی و ضرب آنها در بردار حالت مدل مرجع به فرم زیر

$$x_r(t) \Rightarrow \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i h_j K_{ij}^k x_{rk}(t), \text{ for } k = 1, \dots, n.$$

خطای حالت ماندگار در کنترل تعقیبی با معیار H_{∞} برای ورودیهای DC یا مربعی با فرکانس پایین صفر خواهد شد. با این کار طراحی کنترل کننده فازی تعقیبی پایان می یابد. در بلوک دیاگرام شکل ۱، مکانیزم پیاده سازی کنترل کننده تعقیبی فازی نهایی با معیار H_{∞} ارائه شده در این مطالعه به تصویر کشیده شده است.



شکل ۱. بلوک دیاگرام کنترل کننده نهایی بهینه فازی تعقیبی با معیار H_{∞}

نکته ۵: مساله دیگری که بایستی در نظر گرفته شود، بار محاسباتی رهیافت ارائه شده در این مطالعه است. از آنجا که کنترل کننده ساختار پیچیده تری نسبت به رهیافت‌های دیگر دارد، علیرغم منجر شدن به کیفیت بالاتر کنترل فازی تعقیبی با معیار H_{∞} و کاهش هر چه بیشتر مقدار / بهینه، حجم محاسباتی بالاتری دارد. یک راه برای کاهش هر چه بیشتر این حجم محاسباتی، مدل‌سازی تاکاگی - سوگنو با تعداد قوانین کمتر فازی است. هر اندازه که تعداد قوانین اگر - آنگاه مدل تاکاگی - سوگنو کمتر باشد، بار محاسباتی کمتر خواهد بود. در عین حال این امکان نیز وجود دارد که نتایج این مقاله به حالت کنترل مقاوم تعمیم داده شود. اگر فرض کنیم که

در مقادیر ماتریس‌های مربوط به مدل (۱)، نامعینی به فرم متغیر با زمان ولی با دامنه محدود وجود داشته باشد، می‌توان نتایج این مقاله را به حالت مقاوم تعمیم داد. در حالت مقاوم، عملکرد تعقیبی برای گستره‌ای از تغییرات در ماتریس‌های مدل تاکاگی – سوگنو تضمین می‌شود. حال اگر برای نیل به کاهش حجم محاسباتی در رهیافت این مطالعه، اقدام به مدل‌سازی تاکاگی – سوگنو با قوانین کمتر اگر – آنگاه بنماییم، خطای مدل‌سازی را می‌توان با در نظر گرفتن نامعینی در مدل تاکاگی – سوگنو جبران نمود و از مکانیزم کنترل مقاوم فازی تعقیبی استفاده کرد.

۴- شبیه‌سازی

در این بخش مساله طراحی کنترل‌کننده بهینه فازی تعقیبی با معیار H_{∞} که در این مطالعه مورد بحث قرار گرفت، بر روی سیستم غیرخطی پاندول معکوس از جهات مختلف مورد ارزیابی قرار گرفته و نتایج آن با دو مرجع بروز متفاوت مقایسه می‌شوند. معادلات حالت سیستم پاندول معکوس به فرم زیر می‌باشند:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_1(t) = \mathbf{x}_2(t), \\ \dot{\mathbf{x}}_2(t) = \frac{\mathbf{g}\sin(\mathbf{x}_1(t)) - \mathbf{a}m\mathbf{x}_2(t)^2 \sin(2\mathbf{x}_1(t)) / 2 - \mathbf{a}\cos(\mathbf{x}_1(t))\mathbf{u}(t)}{4 \frac{1}{3} - \mathbf{a}m\cos^2(\mathbf{x}_1(t))} \\ + \mathbf{w}(t), \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{x}_1(t) + \mathbf{v}(t) \end{cases}$$

در روابط بالا $\mathbf{x}_1(t)$ زاویه پاندول با محور عمودی بر حسب رادیان و $\mathbf{x}_2(t)$ سرعت زاویه‌ای بر حسب رادیان بر ثانیه می‌باشند. $\mathbf{u}(t)$ نیروی افقی ورودی به ارابه پاندول و $\mathbf{w}(t)$ اختلال خارجی با دامنه محدود و $\mathbf{v}(t)$ نویز اندازه‌گیری با دامنه محدود می‌باشند. مقادیر مربوط به پارامترهای پاندول به صورت زیر هستند:

$$\text{kg}, M=8 \text{ kg}, l=0.5 \text{ m}, m=2$$

این سیستم غیر خطی پاندول معکوس با مدل فازی تاکاگی – سوگنو با استفاده از روش خطی سازی ناحیه‌ای با دو قانون تقریب زده می‌شود:

$$\mathbf{a} = \frac{1}{M+m}, \beta = \cos\left(\frac{88\pi}{180}\right), \mathbf{x}(t) = [\mathbf{x}_1(t) \quad \mathbf{x}_2(t)]^T,$$

Rule 1: IF \mathbf{x}_1 is about 0 THEN

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_1\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_{11}\mathbf{u}(t) + \mathbf{B}_{21}\mathbf{w}(t), \text{ and } \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}_{11}\mathbf{x}(t) + \mathbf{C}_{21}\mathbf{v}(t), \quad \text{THEN}$$

Rule 2: IF \mathbf{x}_1 is about $\pm \frac{88\pi}{180}$

$$\text{and } \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}_{12}\mathbf{x}(t) + \mathbf{C}_{22}\mathbf{v}(t), \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_2\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_{12}\mathbf{u}(t) + \mathbf{B}_{22}\mathbf{w}(t), \quad \text{THEN}$$

where

$$A_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \frac{\mathbf{g}}{4l/3 - aml} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, B_{11} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \frac{-a}{4l/3 - aml} \end{bmatrix}, B_{21} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix}.$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \frac{2g}{\pi(4l/3 - aml\beta^2)} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, B_{12} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \frac{-a\beta}{4l/3 - aml\beta^2} \end{bmatrix}, B_{22} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix}.$$

$$C_{11} = C_{12} = [\mathbf{1} \quad \mathbf{0}], C_{21} = C_{22} = \mathbf{1}.$$

برای ماتریس A_r و بردار B_r در معادله حالت (۴) که مربوط به حالت مرجع می باشند، مقادیر عددی زیر در نظر گرفته می شوند:

$$B_r = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix}, A_r = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ -\mathbf{6} & -\mathbf{5} \end{bmatrix}$$

ماتریس وزنی Q در معیار کنترلی تعقیبی (۵) برابر $Q = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$ فرض می شود. با اعمال نتایج قضیه ۱ و نکات ۲ و ۴ به

این مدل تاکاگی _ سوگنو به همراه حالت مرجع و معیار کنترلی تعقیبی H_{∞} ، نتایج زیر بدست می آیند:

$$\gamma_{opt} = 1.19, (\gamma_{opt}^2 = 1.41)$$

$$A_c^{11} = 1 \times 10^3 \begin{bmatrix} -0.1589 & -1.7040 \\ -0.0603 & -2.6090 \end{bmatrix}, A_c^{22} = \begin{bmatrix} -22.8027 & -502.6149 \\ 145.9277 & -789.3143 \end{bmatrix}$$

$$A_c^{12} = 1 \times 10^4 \begin{bmatrix} -0.0625 & -1.6927 \\ -0.0767 & -2.5682 \end{bmatrix}, A_c^{21} = \begin{bmatrix} -8.9749 & -50.9407 \\ 166.9473 & -104.9766 \end{bmatrix}$$

$$F_c^{11} = \begin{bmatrix} 0.1603 & -0.0003 \\ -1.8820 & -0.0005 \end{bmatrix}, F_c^{22} = \begin{bmatrix} -0.4725 & 0.0003 \\ -2.8410 & 0.0005 \end{bmatrix}, B_c^1 = \begin{bmatrix} -0.0092 \\ 2.9817 \end{bmatrix}, B_c^2 = \begin{bmatrix} -0.0092 \\ 2.9817 \end{bmatrix}$$

$$F_c^{12} = \begin{bmatrix} -16.1302 & 0.0117 \\ -26.8488 & -0.0412 \end{bmatrix}, F_c^{21} = \begin{bmatrix} 0.0052 & -0.0012 \\ -1.8403 & 0.0571 \end{bmatrix}$$

$$G_c^1 = 1 \times 10^3 [-1.5689 \quad 0.0034], G_c^2 = 1 \times 10^5 [1.6470 \quad -0.0011], C_c^1 = 1 \times 10^7 [0.1576 \quad 1.7391], C_c^2 = 1 \times 10^8 [0.0633 \quad 1.7271]$$

ضرایب استاتیکی که در نکته ۴ به آن پرداخته شد، برای زاویه پاندول و نیز برای سرعت زاویه ای پاندول به ترتیب زیر خواهند

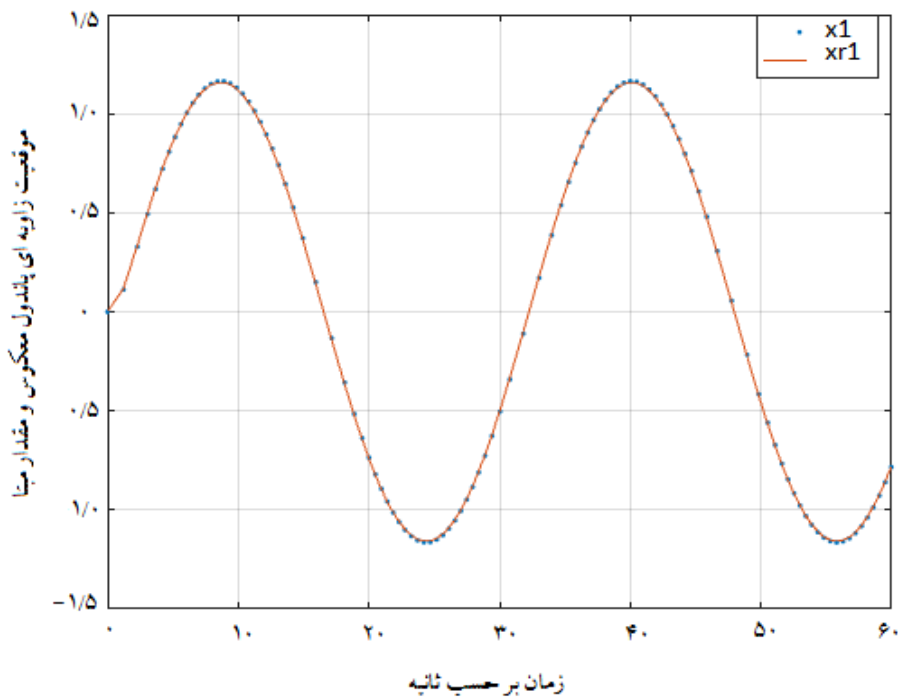
بود:

$$K_{11}^2 = 1, K_{12}^2 = 1, K_{21}^2 = 1, K_{22}^2 = 1. K_{11}^1 = 1.9996, K_{22}^1 = 1.3198, K_{12}^1 = 1.1785, K_{21}^1 = 1.3068,$$

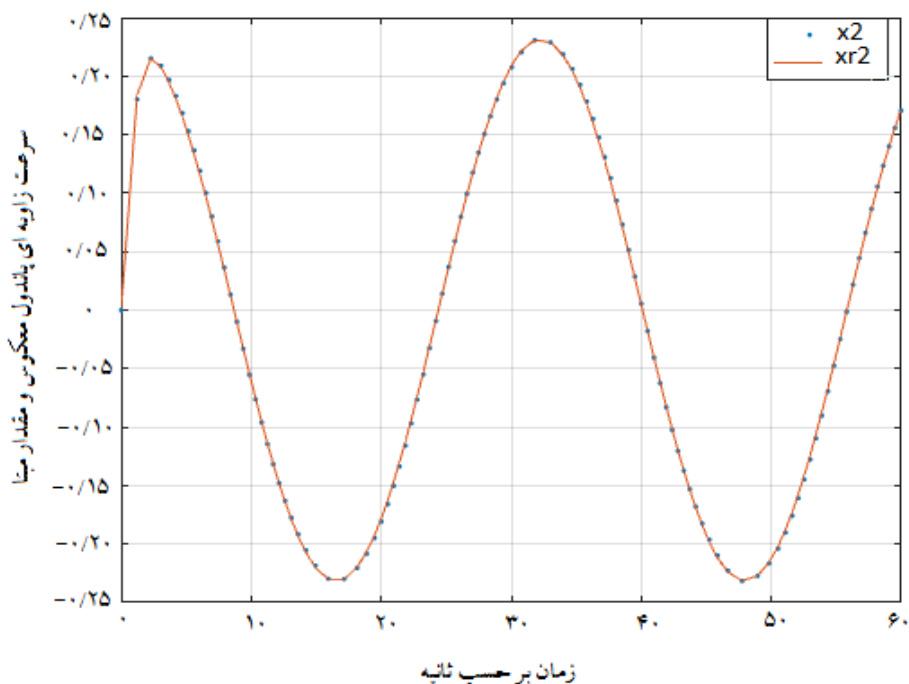
این سیستم به همراه کنترل کننده در محیط سیمولینک شبیه سازی شده و برای سیگنال $r(t) = 8\sin(0.2t)$ ، (۴) در مدل مرجع

فرض شده است. همچنین اختلال $w(t)$ در سیستم به فرم یک سیگنال سینوسی با اندازه $w(t) = 0.2\sin(0.1t)$ و نویز اندازه

گیری $v(t)$ به فرم سیگنال نویز سفید گوسی با چگالی انرژی ۱/۰٪ منظور شده است.



شکل ۲. موقعیت زاویه ای پاندول معکوس در مقایسه با مقدار مرجع بر حسب رادیان



شکل ۳. سرعت زاویه ای پاندول معکوس در مقایسه با مقدار مرجع بر حسب رادیان بر ثانیه

شکل‌های شماره ۲ و ۳ به ترتیب نمایانگر عملکرد تعقیبی سیستم حلقه بسته می باشند. این شکل‌ها سطح قابل قبولی از عملکرد تعقیبی را نشان می دهند. برای بررسی بیشتر این عملکرد تعقیبی نتایج حاصله با دو مرجع دیگر مقایسه می شوند. مرجع اولی، روش ارائه شده در [۱۴] می باشد که در آن از یک کنترل کننده چهار پارامتری استفاده شده است. مقادیر پارامترهای مدل مرجع و ماتریس وزنی مشابه مقادیر بالا فرض شده اند. اگر از روش ذکر شده در این مرجع، کنترل کننده بهینه را طراحی کنیم به مقدار $\gamma_{opt}^2 = 1.75$ منجر

می شود. در مرجع [۴] یک کنترل کننده فازی تعقیبی با معیار H_{∞} از رهیافت ساختار مشاهده گر حالت _ فیدبک حالت مشاهده شده استفاده شده است. با اعمال چند مرتبه سعی و خطا، بهترین حالت کنترلی تعقیبی فازی در این مرجع برای مقادیر زیر بدست آمد.

$$, \lambda = 100, \alpha_k = \infty, k = \infty. Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.0001 \end{bmatrix}$$

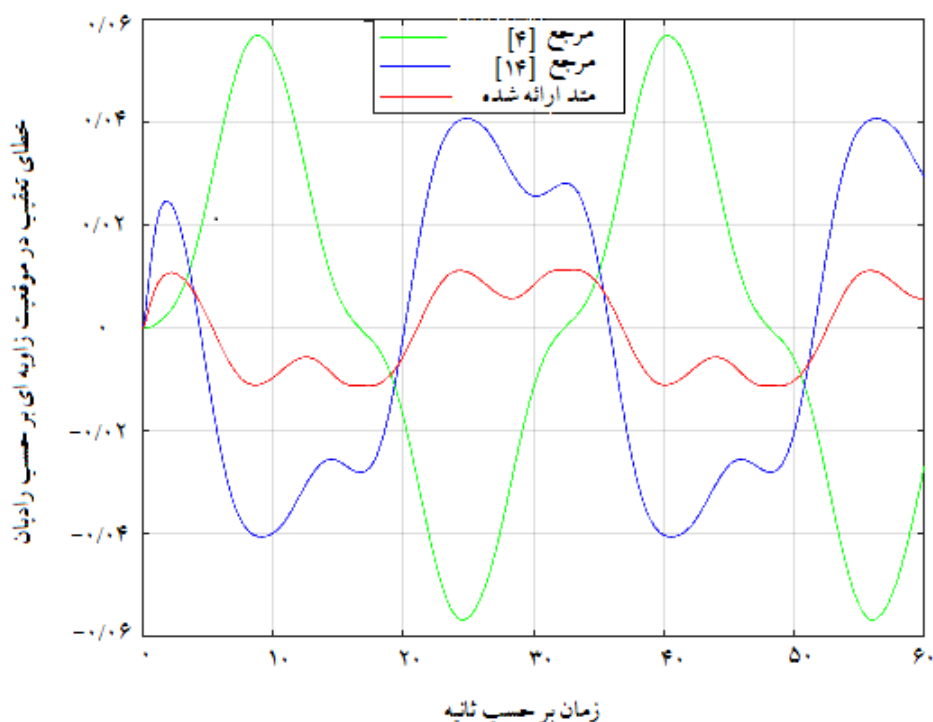
این پارامترها در مرجع [۴] تعریف شده اند. لازم به ذکر است که در نتایج این مرجع در ابتدا بایستی دو پارامتر، مقدارگذاری شوند و سپس نامساوی های ماتریسی خطی آنها حل شوند.

کنترل بهینه که با استفاده از این رهیافت بدست می آید، مقدار $\gamma_{opt}^2 = 2.80$ برای H_{∞} نرم خطای تعقیب منجر می شود. مقایسه ۳ مقدار کمینه بدست آمده برای نرم خطای تعقیب بوضوح نشان می دهد که رهیافت ارائه شده در این مقاله از دو مرجع دیگر درجه کمتری از محافظه کاری را دارد. جدول ۱ این مقایسه را نشان می دهد.

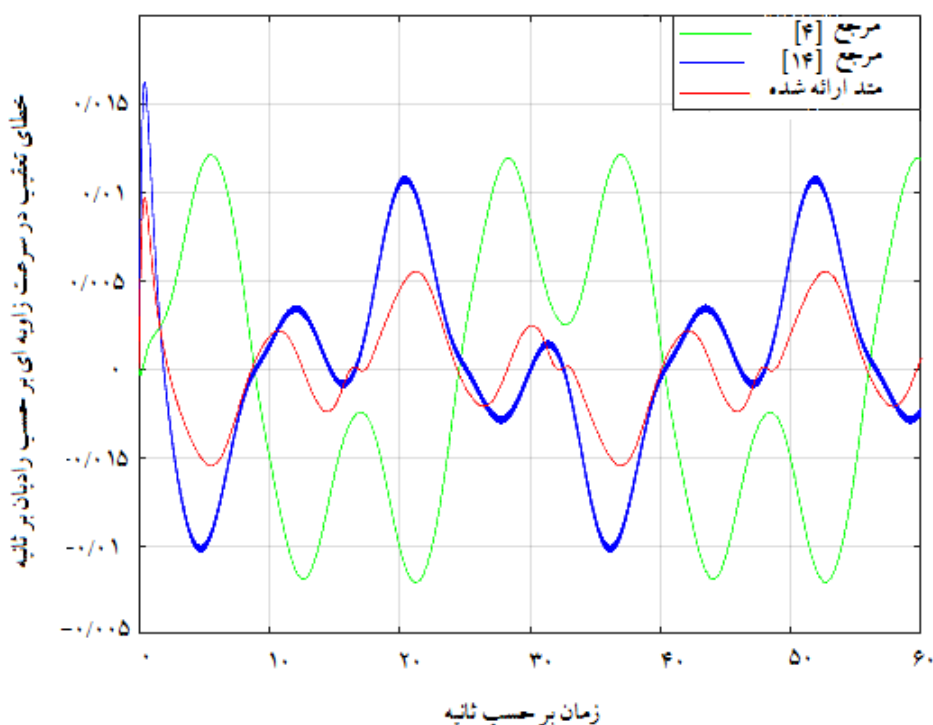
جدول ۱. مقایسه γ_{opt}^2 (کاما ۲ - بهینه) بین متد ارائه شده در این مطالعه با ۲ رهیافت به روز

متد ارائه شده در این مطالعه	مرجع [۱۴]	مرجع [۴]	γ^2 - بهینه
۱/۴۱	۱/۷۵	۲/۸۰	

لازم به ذکر است که اگر مقدار داده شده اولیه γ برای یافتن یک کنترل کننده تعقیبی فازی با معیار H_{∞} ، مقدار کمتری از ۱/۷۵ منظور شود، هر دو رهیافت ارائه شده در مراجع [۴] و [۱۴] به جواب نمی رسند و نامساوی های ماتریسی خطی که این دو رهیافت ارائه می دهند، امکان پذیر نخواهند بود. این بررسی نشان دهنده این موضوع است که فضای وجود جواب در رهیافت ارائه شده در این مطالعه بزرگتر از فضای وجود جواب در دو رهیافت مذکور می باشد. این امر نتیجه بکارگیری کنترل کننده فازی تعقیبی با شش پارامتر طراحی در هر کنترل کننده محلی خطی است. برای مقایسه هر چه بیشتر این ۳ رهیافت، شبیه سازی مشابهی در کنترل کننده های بهینه ای که از این ۳ رهیافت، طراحی می شوند، انجام شده است. نتایج این شبیه سازی ها در شکل های ۴ و ۵ با یکدیگر مقایسه شده اند. همانطور که از شکل ها بدست می آید، روش ارائه شده در این مقاله منجر به حصول خطای کمتر تعقیبی نسبت به دو مرجع دیگر شده است. این مقایسه عملکرد بهتر رویکرد ارائه شده را نشان می دهد.



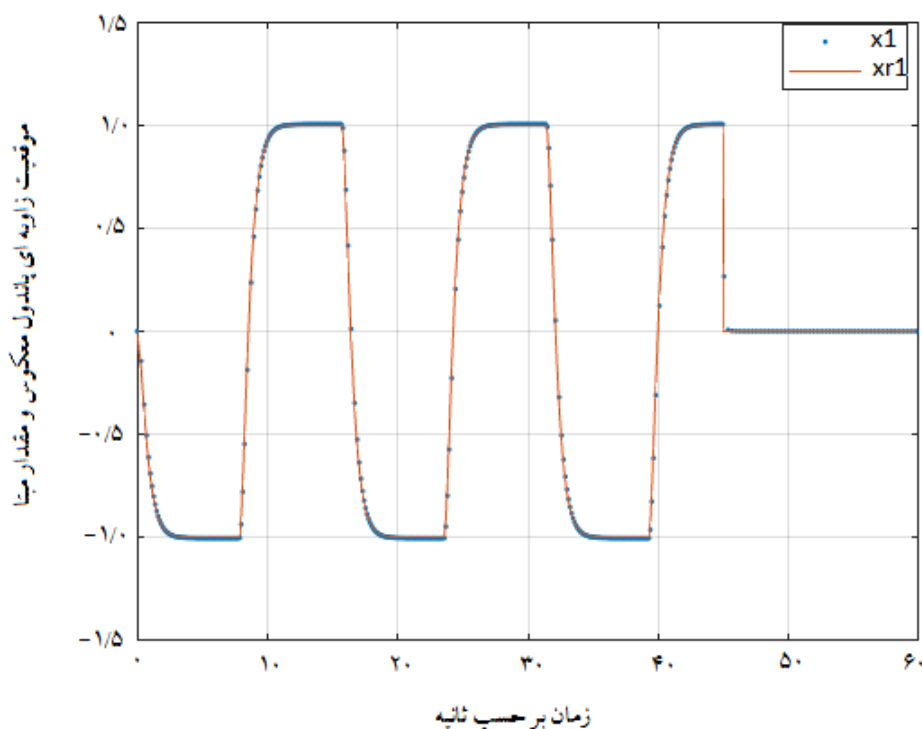
شکل ۴. خطای تعقیب در موقعیت زاویه ای پاندول معکوس در مقایسه با دو رهیافت [۴] و [۱۴]



شکل ۵. خطای تعقیب در سرعت زاویه ای پاندول معکوس در مقایسه با ۲ رهیافت [۴] و [۱۴]

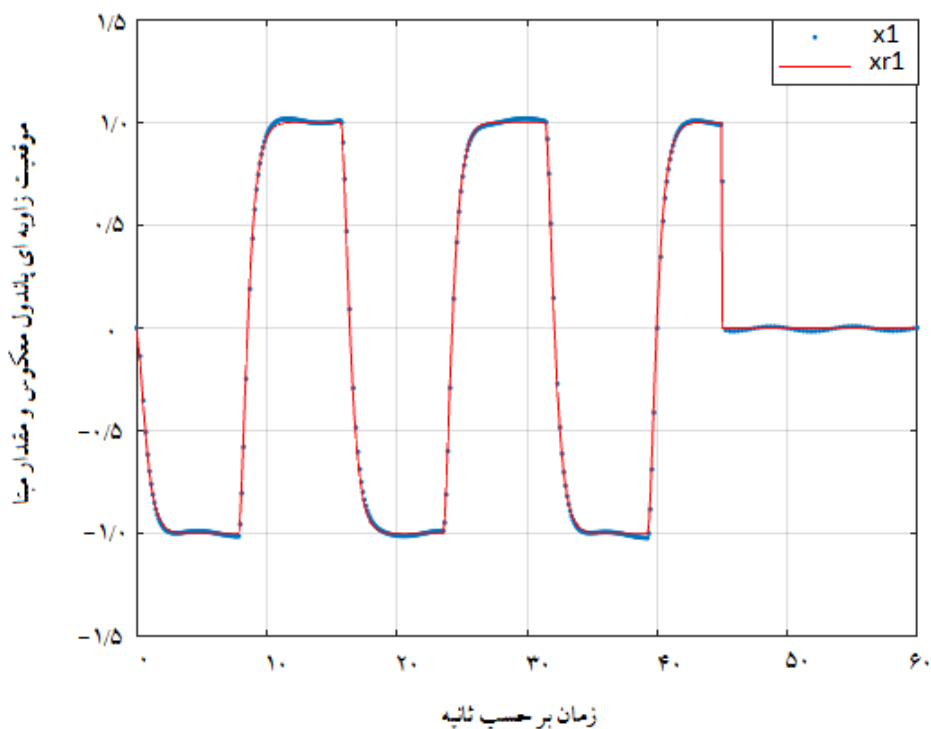
لازم به ذکر است که در مراجع بروز [۳] و [۵] نیز رهیافت‌های دیگری برای حل مساله کنترلی تعقیبی فازی مورد توجه قرار گرفته اند. اما هر دو این مراجع، مساله کنترل تعقیبی را برای سیستم‌های گسسته در زمان بررسی نموده‌اند و لذا امکان مقایسه مستقیم با نتایج این مطالعه وجود ندارد. با این وجود بایستی اشاره کرد که در مرجع [۵] از یک کنترل‌کننده بر مبنای مشاهده گر حالت استفاده شده

است که در روند طراحی ضرایب مشاهده گر حالت و فیدبک حالت مشاهده شده که تنها دو پارامتر هستند، فرض های محافظه کارانه بکار گرفته شده اند تا نتایج به فرم نامساوی های ماتریسی خطی ارائه گردند. در حالیکه در این مطالعه از یک کنترل کننده شش پارامتری برای هر زیرسیستم محلی استفاده شده که علاوه بر انعطاف پذیری بیشتر، از هیچ فرضی برای تبدیل نتایج به فرم نامساوی های ماتریسی خطی استفاده نشده است. مرجع [۳] از یک روش کنترل تطبیقی برای حل مساله کنترلی تعقیبی فازی استفاده کرده است. نتایج این مرجع نیز برای سیستم های گسسته در زمان می باشد. اما لازم به ذکر است که روش کنترل تطبیقی هم از لحاظ مقاوم بودن و هم از لحاظ بار محاسباتی نسبت به روش ارائه شده در این مطالعه، پیچیده تر می باشد. به منظور بررسی بیشتر روش ارائه شده در این مطالعه، حالت جدیدی در این مثال در نظر گرفته می شود. فرض کنید که سیگنال $r(t)$ در معادله حالت مرجع (۴)، یک سیگنال مربعی با فرکانس پایین باشد که در زمان ثانیه ۴۵ صفر می شود. عملکرد تعقیبی سیستم حلقه بسته برای چنین سیگنالی در شکل ۶ به تصویر کشیده شده است. در این شکل، مشاهده می شود که خروجی سیستم تحت کنترل که همان موقعیت زاویه ای پاندول معکوس می باشد، تا قبل از ثانیه ۴۵، دارای بهره واحد DC می باشد. این امر ناشی از اثر بهره های استاتیکی است که در نکته ۴ به آنها پرداخته شد. در ثانیه ۴۵، با صفر شدن سیگنال، پاندول در حالت معکوس، (زاویه صفر نسبت به محور عمودی) قرار گرفته و در همین حالت تا پایان زمان کنترل باقی می ماند.



شکل ۶. موقعیت زاویه ای پاندول معکوس در مقایسه با مقدار مرجع بر حسب رادیان برای مقادیر کوچکتر سیگنالهای $w(t)$ و $v(t)$

برای بررسی اثرات اختلالات ورودی $w(t)$ به سیستم و نیز اثر نویز اندازه گیری $v(t)$ در خروجی سیستم، سیگنال $w(t)$ از مقدار اولیه مفروض در بخش اول این مثال، به مقدار $0.5 \sin(0.1t)$ و چگالی انرژی سیگنال $v(t)$ که نویز سفید گوسی است از مقدار مفروض در بخش اول این مثال به 0.05% افزایش پیدا می کند. در قیاس با شکل شماره ۶، شکل شماره ۷ نشان می دهد که عملکرد تعقیبی کنترل کننده فازی در حد قابل قبولی باقی مانده است.



شکل ۷. موقعیت زاویه ای پاندول معکوس در مقایسه با مقدار مرجع بر حسب رادیان برای مقادیر بزرگتر سیگنالهای $w(t)$ و $v(t)$

۵- نتیجه گیری

مسئله طراحی کنترل‌کننده بهینه فازی تعقیبی با معیار H_{∞} بری مدل تاکاگی _ سوگنو سیستم‌های غیر خطی، در این مطالعه در نظر گرفته شده است. یک کنترل‌کننده شش پارامتری برای هر زیر سیستم محلی خطی منظور شده است. پارامترهای کنترل‌کننده با حل یک دستگاه نامساوی‌های ماتریسی خطی قابل محاسبه هستند. از آنجا که در این مطالعه از کنترل‌کننده ای با شش پارامتر طراحی استفاده شده است، نتایج حاصله دارای انعطاف پذیری بیشتر و درجه محافظه کاری کمتری هستند. عملکرد کنترل‌کننده ارائه شده در این مطالعه بر روی سیستم کنترلی غیر خطی پاندول معکوس این نکته را تایید می‌کند. تعمیم نتایج این مقاله برای حالت کنترل تعقیبی فازی مقاوم امکان پذیر است. همینطور امکان تعمیم نتایج به سیستم‌های ناکاگی _ سوگنو گسسته در زمان، می‌تواند به عنوان یک تحقیق جدید در نظر گرفته شده و نتایج آن با نتایج موجود در طراحی کنترل‌کننده بهینه فازی تعقیبی با معیار H_{∞} بری مدل تاکاگی _ سوگنو گسسته در زمان مقایسه شود.

مراجع

- [۱] Y.-C. Chang, C.-H. Chen, Z.-C. Zhu and Y.-W., Huang, "Speed control of the surface-mounted permanent-magnet synchronous motor based on takagi-sugeno fuzzy models", IEEE Transactions on Power Electronics, 2016, vol. 31, no. 9, pp. 6504-6510.
- [۲] P. Li, P. Li, and Y. Sui, "Adaptive fuzzy hysteresis internal model tracking control of piezoelectric actuators with nanoscale application", IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2016, vol. 24, no. 5, pp. 1246-1254.

- [۳] L. Cheng, W. Liu, Z.-G. Hou, T. Huang, J. Yu and M. Tan, "An adaptive takagi-sugeno fuzzy model based predictive controller for piezoelectric actuators". IEEE Transactions on Industrial Electronics, 2017, vol. 64, no. 4, pp. 3048-3058.
- [۴] C. Sendi and M. A. Ayoubi, "Robust fuzzy tracking control of flexible spacecraft via t-s fuzzy model", IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2018, vol. 54, no. 1, pp. 170-179.
- [۵] C. Zhang, J. Hu, J. Qiu, W. Yang, H. Sun, and Q. Chen, "A novel fuzzy observer-based steering control approach for path tracking in autonomous vehicles", IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2019, vol. 27, no. 2, pp. 278-290.
- [۶] H. Ying, "Analytical analysis and feedback linearization tracking control of the general takagi-sugeno fuzzy dynamic systems", IEEE Transactions on Systems, Man Cybernetics, 1999, vol. 29, no. 3, pp. 290-298.
- [۷] W.J. Wang, and H. R. Lin, "Fuzzy control design for the trajectory tracking on uncertain nonlinear systems", IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 1999, vol. 7, no. 1, pp. 53-62.
- [۸] T.-S., Li, S.-C., Tong and G. Feng, "A novel robust adaptive-fuzzy tracking control for a class of nonlinear multi-input/multi-output systems", IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2010, vol. 18, no.1, pp. 150-160.
- [۹] Y.-J. Liu, W. Wang, S.C. Tong, and Y.S. Liu, "Robust Adaptive tracking control for nonlinear systems based on bounds of fuzzy approximation parameters", IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics-Part A: Systems and Humans, 2010, vol. 40, no. 1, pp. 170-184.
- [۱۰] Y.-J. Liu, S.-C. Tong and T.S. Li, "Observer-based adaptive fuzzy tracking control for a class of uncertain nonlinear MIMO systems", Elsevier, Fuzzy Sets and Systems, 2011, vol. 164, pp. 25-44.
- [۱۱] C.-L. Hwang, C.-C. Chiang, and Y.-W. Yeh, "Adaptive fuzzy hierarchical sliding-mode control for trajectory tracking of uncertain underactuated nonlinear dynamic systems", IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2014, vol. 22, no. 2, pp. 286-299.
- [۱۲] C. Tseng, B. Chen, and H. Uang, "Fuzzy tracking control design for nonlinear dynamic systems via T-S fuzzy model", IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2001, vol. 9, no. 3, pp. 381-392.
- [۱۳] C. Tseng, "Model reference output fuzzy tracking control design for nonlinear discrete-time systems with time-delay", IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2006, vol. 14, no. 1, pp. 58-70.
- [۱۴] S. H., Esfahani, "An Improvement on the problem of output feedback fuzzy tracking control design for nonlinear discrete-time systems with state and input delay", IET Control Theory and Applications, 2016, vol. 10, no. 1, pp. 24-34.
- [۱۵] H.D. Tuan, P. Apkarian, T. Narikiyo, and Y. Yamamoto, "Parametrized linear matrix inequality techniques in fuzzy control design", IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2001, vol. 9, pp. 324-332.