



دانشگاه صنعتی سهند

DOR:

20.1001.1.23223146.1401.9.2.2.0

نشریه علمی-فنی و مهندسی برق

دوره ۹ - شماره ۲

پاییز و زمستان ۱۴۰۱

صفحات ۲۷ الی ۵۰

ISSN: 2322-3146

<http://journals.sut.ac.ir/jnsee>

هدایت زمان-متناهی سوزن جراحی رباتیک در بافت پروستات بر اساس رویکرد کنترل غیرخطی مقاوم-تطبیقی

علی ابوبلی^۱، سجاد مرادی^۲ و وحید ابوطالبی^۳

^۱ نویسنده مسئول، استادیار، بخش کنترل و الکترونیک، دانشکده مهندسی برق، دانشگاه یزد، ایران،

Aliaboee@yazd.ac.ir

^۲ فارغ‌التحصیل کارشناسی ارشد برق-کنترل، دانشکده مهندسی برق، دانشگاه یزد، ایران،

Sajad_moradi1995@yahoo.com

^۳ دانشیار، بخش مخابرات، دانشکده مهندسی برق، دانشگاه یزد، ایران، Abootalebi@yazd.ac.ir

چکیده

واژه‌های کلیدی

پایداری زمان-متناهی کلی،

سیستم دینامیکی سوزن-بافت،

کنترل مد لغزشی پایاندار،

سوزن جراحی رباتیک،

کنترل کننده‌ی غیرخطی مقاوم-تطبیقی.

در این مقاله، سه نوع کنترل کننده‌ی غیرخطی زمان-متناهی برای هدایت سوزن جراحی رباتیک در داخل بافت پروستات با وجود نامعینی پارامتری، عدم قطعیت مدل‌سازی و اغتشاش پیشنهاد می‌شوند. گشتاور تولیدی توسط هر کدام از این کنترل کننده‌ها به ساختار حلقه‌بسته‌ی سوزن جراحی رباتیک اعمال می‌شود و باعث می‌گردد متغیر جابجایی مکانی سیستم حلقه‌بسته بعد از گذشت مدت زمان متناهی قابل تنظیمی دقیقاً به مسیر مورد نظر درون بافت همگرا شود. برای طراحی کنترل کننده‌های مذکور از تعمیم روش کنترل مد لغزشی پایاندار (به عنوان راهکار اساسی کنترلی غیرخطی-مقاوم) و تلفیق آن با مفاهیم کنترل تطبیقی (به منظور طراحی قوانین به‌روزرسانی و تخمین پارامترهای ثابت نامعلوم) استفاده می‌شود. شایان ذکر است که تفاوت اساسی میان سه ساختار کنترلی پیشنهادی در تعریف خمینه‌های لغزشی غیرخطی است. با به‌کارگیری تئوری پایداری لیاپانوف و استفاده از چندین لم کاربردی به صورت ریاضی اثبات می‌گردد که هر سه راهکار کنترلی معرفی شده ضمن برآورده ساختن هدف هدایت سوزن، پایداری زمان-متناهی کلی را برای سیستم حلقه‌بسته‌ی سوزن-بافت تضمین می‌کنند. قوانین به‌روزرسانی که در هر سه راهکار کنترلی وجود دارند، مقادیر ثابت‌های فیزیکی نامعلوم سیستم حلقه‌بسته را به صورت لحظه‌ای و پیوسته تخمین می‌زنند. در فرآیند تحلیل پایداری، به عنوان نتیجه‌ی جنبی نشان داده می‌شود که پاسخ‌های زمانی مرتبط با این تخمین‌ها بعد از گذشت مدت زمان متناهی دقیقاً به مقادیر ثابتی می‌رسند. در انتها، با استفاده از نرم‌افزار MATLAB هر سه نوع کنترل کننده پیشنهادی، بر روی سیستم سوزن-بافت مرتبه‌ی دوّم شبیه‌سازی عددی می‌شوند تا عملکرد مناسب آن‌ها آشکار گردد.



Sahand University
of Technology

DOR:

[20.1001.1.23223146.1401.9.1.2.8](https://doi.org/10.1001.1.23223146.1401.9.1.2.8)

Journal of Nonlinear
Systems in Electrical
Engineering

Vol.9, No.2

Autumn and Winter 2022

ISSN: 2322 – 3146

<http://journals.sut.ac.ir/jnsee>

Finite-Time Steering for a Robotic Surgical Needle in Prostate Tissue Based on the Adaptive-Robust Nonlinear Control Approach

Ali Abooe¹, Sajad Moradi² and Vahid Abootalebi³

¹**Corresponding Author**, Assistant professor, Department of Electrical Engineering, Yazd University, Yazd, Iran

²Ms Student, Department of Electrical Engineering, Yazd University, Yazd, Iran

³Associate Professor, Department of Electrical Engineering, Yazd University, Yazd, Iran

ABSTRACT

In this paper, three different finite-time nonlinear controllers are proposed to steer a robotic surgical needle in prostate tissue subject to parametric and modeling uncertainties. The torque generated by each type of these controllers is injected to the surgical needle's closed-loop structure and, in consequence, the system's state variable precisely converges to the desired path in prostate tissue within an adjustable finite time. The mentioned controllers are constructed based on the developed terminal sliding mode control method (as the main approach of robust-nonlinear control) incorporated with the adaptive control technique (for designing adaptation laws and estimation of unknown physical constants). It is worth noting that the basic difference between these controllers is in the definition of their nonlinear sliding manifolds. By utilizing the Lyapunov stability theory and several applicable lemmas, it is mathematically proven that all types of the introduced control approaches are able to accomplish the finite-time steering objective and guarantee the global finite-time stability for the needle-tissue dynamical system. Adaptation laws (existing in the proposed nonlinear controllers) continuously estimate the unknown physical constants and it is demonstrated that time responses of these estimations exactly reach the constants values over the finite time. Finally, by using MATLAB software, three types of the proposed controllers are separately simulated onto a second-order needle-tissue system to illustrate their proper performance.

Keywords

Global finite-time stability,
needle-tissue dynamical
system,
terminal sliding mode
control,
robotic surgical needle,
adaptive-robust nonlinear
controller.

۱- مقدمه

امروزه انجام جراحی‌های پزشکی به کمک ربات‌ها توسعه‌ی چشم‌گیری پیدا کرده است [۳-۱]. بنابراین در سال‌های اخیر، ساخت انواع ربات‌های جراح و طراحی روش‌های کنترلی غیرخطی مرتبط با آن‌ها مورد توجه مهندسين کنترل قرار گرفته [۴] و در این زمینه مطالعات پژوهشی و کارهای عملی متعددی انجام پذیرفته است [۵]. یکی از موضوع‌های مطالعاتی مهم در بحث ربات‌های جراح، استفاده از سوزن‌های قابل انعطاف در جراحی‌ها و کنترل حرکت سوزن در بافت به منظور رسیدن به غدد سرطانی یا تومورها و نفوذ به آن‌ها، کاشت بذره‌های رادیواکتیو در اطراف تومورها، باز کردن رگ‌های مسدود شده و نمونه‌برداری است [۶]. در واقع سوزن‌های جراحی رباتیکی (Robotic surgical needles) به کمک پزشکان آمده‌اند و باعث گردیده‌اند که خطاهای انسانی تا حد زیادی کاهش یابند [۷-۹]. بنابراین کنترل و نظارت مداوم بر نحوه‌ی حرکت سوزن جراحی رباتیک در بافت بدن از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است و ضرورت دارد که راه‌کارهای مناسبی برای آن اتخاذ شود [۱۰ و ۱۱]. برای کنترل حرکت سوزن جراحی و نظارت بر عملکرد درست آن، نمونه‌های متنوعی از سوزن‌های انعطاف‌پذیر طراحی شده‌اند [۱۲].

مقاله‌های علمی مرتبط با هدایت خودکار سوزن‌های جراحی رباتیک اساساً به دو موضوع تحقیقاتی شاخص می‌پردازند. این دو موضوع تحقیقاتی مرتبط با حرکت سوزن عبارتند از (الف): مدل‌سازی دینامیکی حرکت سوزن جراحی رباتیک [۸-۳] و (ب): ارائه‌ی راهکارهای متنوع برای کنترل و هدایت حرکت سوزن جراحی در مسیر موردنظر داخل بافت [۱۶-۱۳]. در مورد موضوع اول، مراجع علمی متعددی به بحث مدل‌سازی دینامیکی حرکت انواع سوزن‌های جراحی رباتیک در بافت‌ها پرداخته‌اند و معادلات دیفرانسیلی غیرخطی مرتبط با حرکت سوزن را تحت فرض‌ها و شرایط متفاوتی استخراج کرده‌اند [۹-۴]. در راستای موضوع دوم با استفاده از ورودی‌های کنترلی، سرعت تزریق، سرعت چرخش نوک سوزن می‌توان انحنای سوزن و در نتیجه حرکت سوزن را کنترل نمود [۱۷-۱۹]. با توجه به این انگیزش، برخی مقاله‌های علمی به بحث طراحی کنترل‌کننده‌های حرکت سوزن در مسیر موردنظر داخل بافت پرداخته‌اند [۲۲-۲۰]. تعدادی از راهکارهای کنترلی مورد استفاده برای ساختار حلقه‌بسته‌ی سیستم سوزن-بافت عبارتند از کنترل‌کننده‌های کلاسیک خطی، کنترل مد لغزشی (Sliding mode control) [۱۴، ۱۵ و ۱۷]، روش تطبیقی [۱۱]، رویکرد ترکیبی لغزشی-تطبیقی [۱۹]، روش گام به عقب (Back stepping control method) [۱۲ و ۲۰]، راهکار خطی‌سازی فیدبک [۱۰]، راهبرد کنترلی هوشمند عصبی-فازی [۱۸، ۲]، راهکار تلفیقی لغزشی-فازی [۱۳]، روش یادگیری تقویتی [۳] و تکنیک کنترل هندسی [۵].

مرور کلی مقاله‌های پژوهشی [۲۱-۱] نشان می‌دهد که برخی کاستی‌ها و نقایص مشترک در بحث کنترل حرکت سوزن جراحی وجود داشته و محققین توجه چندانی به آن‌ها نداشته‌اند. در ادامه به تشریح دو مورد از این نقاط ضعف مشترک پرداخته می‌شود. (الف): تعدادی از مراجع در بحث طراحی روش کنترلی [۵-۲، ۱۰ و ۱۱]، توجه‌ای به نامعینی پارامتری و عدم قطعیت مدل‌سازی سیستم دینامیکی نکرده‌اند. بنابراین راه‌کارهای کنترلی پیشنهادی این مراجع در برابر عوامل ناخواسته‌ی ذکر شده مقاوم نبوده و در پیاده‌سازی عملی با تنزل عملکرد و کارایی سوزن جراحی رباتیک روبرو می‌شوند. در مواجهه با چالش نامعینی پارامتری می‌توان از رویکرد کنترل تطبیقی و طراحی قوانین به‌روزرسانی برای تخمین ثابت‌های فیزیکی نامعلوم سیستم استفاده کرد. علاوه‌براین برای مقابله با مسئله‌ی عدم قطعیت و اغتشاش، می‌توان از کنترل مد لغزشی [۱۴، ۱۵ و ۱۷] به عنوان تکنیک غیرخطی و مقاوم بهره‌جست، (ب): غالب ساختارهای کنترلی پیشنهادی، فقط قادر هستند تا پایداری مجانبی محلی یا پایداری (Uniformly Ultimately Boundedness Stability) را برای سیستم حلقه‌بسته‌ی سوزن-بافت فراهم کنند و اصلاً به بحث پایداری زمان-متناهی کلی توجه

نداشته‌اند. بنابراین در ساختارهای کنترلی مرتبط با این مراجع [۵-۲، ۱۵-۱۰ و ۲۰-۱۷]، همواره خطای ردیابی (هر چند کاهشی) بین حرکت سوزن جراحی در بافت و مسیر موردنظر وجود خواهد داشت که باعث تاثیر نامطلوبی بر روی دقت و موفقیت عمل جراحی می‌شود. برای برطرف ساختن این نقطه‌ی ضعف باید ساختار کنترلی خاصی را طراحی کرد که بتواند پایداری زمان-متناهی کلی را برای سیستم حلقه‌بسته‌ی سوزن-بافت تضمین کند و در نتیجه سوزن جراحی پس از گذشت مدت زمان متناهی دقیقاً به مسیر موردنظر در بافت (با خطای ردیابی صفرواقعی) همگرا شود. در دو دهه‌ی اخیر چندین راهکار کنترلی برای پایدارسازی زمان-متناهی سیستم‌های غیرخطی [۲۲-۲۶] ارائه شده که یکی از موثرترین آن‌ها تکنیک کنترل مد لغزشی پایاندار (Terminal sliding mode control) [۲۷-۳۱] با تعریف خمینه‌های لغزشی (Nonlinear sliding manifolds) است [۳۲-۳۵]. نویسندگان مقاله‌ی حاضر، در مرجع [۳۶]، شرح و بسط کامل و جامعی در مورد ویژگی‌های ذاتی راهکار کنترل مد لغزشی پایاندار و نحوه‌ی طراحی کنترل‌کننده‌های غیرخطی مقاوم با آن نوشته‌اند.

با توجه به انگیزش مطرح شده، در این مقاله به موضوع طراحی کنترل‌کننده‌ی غیرخطی مقاوم-تطبیقی برای هدایت سوزن جراحی رباتیک پرداخته می‌شود تا نوک سوزن بعد از گذشت زمان متناهی دقیقاً به نقطه‌ی هدف در بافت پروستات (Prostate tissue) برسد. ابتدا مدل دینامیکی جامعی (در قالب معادله دیفرانسیل معمولی غیرخطی مرتبه‌ی دوم) برای حرکت سوزن جراحی رباتیک درون بافت پروستات همراه با نامعینی پارامتری، عدم قطعیت مدل‌سازی و اغتشاش معرفی و ارائه می‌گردد. در ادامه با تعریف سه نوع خمینه‌ی لغزشی غیرخطی متفاوت و تلفیق کنترل مد لغزشی پایاندار و قوانین به‌روزرسانی زمان-متناهی، سه کلاس متمایز از کنترل‌کننده‌های غیرخطی مقاوم-تطبیقی معرفی می‌شوند تا اولاً پایداری زمان-متناهی کلی سیستم حلقه‌بسته‌ی سوزن-بافت تضمین گردیده و ثانیاً هدف هدایت زمان-متناهی سوزن جراحی درون بافت پروستات برآورده شود. قوانین به‌روزرسانی برای تخمین ثابت‌های فیزیکی نامعلوم مدل به صورت معادلات دیفرانسیلی غیرخطی مرتبه اول با شرایط اولیه‌ی همواره مثبت هستند و پاسخ‌های زمانی حاصله از آن‌ها پس از گذشت مدت زمان متناهی به طور دقیق به مقادیر عددی ثابتی همگرا شده که لزوماً با مقادیر اسمی (نامی) پارامترهای فیزیکی نامعلوم یکسان نیستند.

ساختار نوشتاری بقیه‌ی مقاله به شرح زیر است. در بخش دوم چندین لم کاربردی مرتبط با پایداری زمان-متناهی مرور خواهند شد. بخش سوم به معرفی مدل دینامیکی سیستم سوزن-بافت اختصاص می‌یابد. در بخش چهارم فرمول‌بندی مسئله‌ی هدایت زمان-متناهی سوزن و تبدیل آن به چالش پایدارسازی زمان-متناهی سیستم غیرخطی ارائه خواهد شد. در بخش پنجم، چندین گروه متفاوت از کنترل‌کننده‌های غیرخطی مقاوم-تطبیقی زمان-متناهی برای سیستم سوزن-بافت معرفی می‌گردند. نتایج شبیه‌سازی کنترل‌کننده‌های پیشنهادی بر روی سیستم سوزن-بافت مرتبه دوم در بخش ششم آورده می‌شوند. نتیجه‌گیری و پیشنهادهایی برای کارهای آینده در بخش هفتم ارائه خواهند شد.

۲- مفاهیم ریاضیاتی پایداری زمان-متناهی

در این بخش چندین لم ریاضیاتی مرتبط با بحث پایداری زمان-متناهی سیستم‌های غیرخطی ارائه خواهد شد.

تعریف ۱. رابطه‌ی (۱) بیانگر یک سیستم غیرخطی خودگردان و $\{x = 0\}$ نقطه‌ی تعادل آن می‌باشد. در این سیستم، $\{f: \mathbb{R}^{n \times 1} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times 1}\}$ تابعی برداری-پیوسته بوده و فرض می‌گردد همواره شرایط یکتایی جواب وجود دارد.

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) \text{ with } x(t) \in \mathbb{R}^n \text{ and } x(t = 0) = x_0 \quad (1)$$

در صورتی که دو شرط (الف) و (ب) برای نقطه‌ی تعادل $\{x = 0\}$ برقرار باشند، آنگاه این نقطه‌ی تعادل، پایدار زمان-متناهی کلی است. (الف): نقطه‌ی تعادل $\{x = 0\}$ پایدار مجانبی کلی باشد، (ب): به ازای هر بردار شرایط اولیه‌ی دلخواه x_0 ، زمان متناهی همگرایی T^* چنان وجود داشته باشد که رابطه $\left\{ \lim_{t \rightarrow T^*} x(t) = 0 \right\}$ برآورده شده و تساوی $\{x(t) = 0\}$ برای زمان‌های $\{t \geq T^*\}$ همواره تضمین گردد [۳۷، ۳۶ و ۲۵].

لم ۱. سیستم غیرخطی (۱) را در نظر بگیرید. در صورتی که تابع همواره مثبت مشتق‌پذیر بیکران شعاعی^۱ $\{V(x(t)): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \text{ and } V(0) = 0\}$ و ثابت‌های عددی $\{\rho_1 > 0\}$ و $\{0 < \rho_2 < 1\}$ وجود داشته باشند که به ازای هر پاسخ $x(t)$ از سیستم غیرخطی (۱)، نامساوی $\{\dot{V}(x(t)) + \rho_1 V^{\rho_2}(x(t)) \leq 0\}$ برقرار گردد، آنگاه اولاً نقطه‌ی تعادل $\{x = 0\}$ پایدار زمان-متناهی کلی بوده و ثانیاً با شروع از هر بردار شرایط اولیه‌ی دلخواه x_0 ، تمامی پاسخ‌های متغیرهای حالت سیستم (۱) بعد از سپری شدن زمان متناهی T^* به صفر خواهند رسید و همواره برای لحظات $\{t \geq T^*\}$ صفر باقی می‌مانند. علاوه‌براین، می‌توان از نامساوی $\{T^* \leq (\rho_1(1 - \rho_2))^{-1} V^{1-\rho_2}(x_0)\}$ برای تعیین کران بالای زمان متناهی T^* استفاده کرد [۳۵، ۳۰ و ۲۹].

لم ۲. یک سیستم غیرخطی مرتبه‌ی دوم به همراه نقطه‌ی تعادل $\{x_1 = x_2 = 0\}$ در (۲) آورده شده که l_1 و l_2 دو ضریب عددی ثابت با شرط $\{l_1 > l_2 > 0\}$ هستند. در (۲)، نماد $\text{sign}(\dots)$ معرف تابع علامت می‌باشد. برای سیستم (۲) با فرض‌های مذکور، نقطه‌ی تعادل $\{x_1 = x_2 = 0\}$ پایدار زمان-متناهی کلی بوده و با شروع از هر شرایط اولیه‌ای و سپری شدن مدت زمان-متناهی T^* پاسخ‌های زمانی دو متغیر حالت دقیقاً به صفر رسیده و همواره صفر باقی خواهند ماند.

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -l_1 \text{sign}(x_1(t)) - l_2 \text{sign}(x_2(t)) \end{cases} \quad (2)$$

هم‌چنین نامساوی (۳)، می‌تواند برای تعیین کران بالای زمان متناهی همگرایی T^* مورد استفاده قرار گیرد که \bar{A} ضریبی اختیاری از بازه‌ی $\left\{ \left(\sqrt{2(l_1 + l_2)} \right)^{-1} < \bar{A} < \left(\sqrt{2(l_1 - l_2)} \right)^{-1} \right\}$ است. ضرایب l_3 ، l_4 و l_5 با استفاده از روابط $l_3 = l_1 + l_2 \text{sign}(x_1 x_2)$ ، $l_4 = \sqrt{2(l_3)^{-1}} (\sqrt{2l_3} \bar{A} - 1)^{-1} \text{sign}(x_1 x_2)$ و $l_5 = \sqrt{0.5l_3} |\sqrt{2l_3} \bar{A} - 1|$ محاسبه می‌شوند [۳۸، ۳۰ و ۲۹].

$$\begin{cases} T^* \leq 2(\min(l_4))^{-1} \sqrt{\Psi(x_1(t=0), x_2(t=0))} \\ \Psi(x_1, x_2) = \begin{cases} 0.25(l_4)^2 (\mathcal{D}(x_1, x_2))^2 & \text{if } x_1 x_2 \neq 0 \\ 0.25(\bar{l})^2 x_2^2(t) & \text{if } x_1 = 0 \\ 0.25|x_1(t)| & \text{if } x_2 = 0 \end{cases} \\ \mathcal{D}(x_1, x_2) = (l_3)^{-1} x_2(t) \text{sign}(x_1(t)) + l_5 \sqrt{|x_1(t)|} + 0.5(l_3)^{-1} x_2^2(t) \end{cases} \quad (3)$$

لم ۳. سیستم غیرخطی مرتبه‌ی دوم (۴) را با نقطه‌ی تعادل $\{x_1 = x_2 = 0\}$ در نظر بگیرید. در این سیستم، ضرایب حقیقی مثبت $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ به نحوی انتخاب شده‌اند که ریشه‌های چندجمله‌ای درجه دوم $\{z^2 + \varepsilon_2 z^1 + \varepsilon_1 = 0\}$ در سمت چپ محور موهومی $j\omega$ باشند. ضریب توانی σ_2 عددی اختیاری در بازه‌ی $\{0 < \sigma_2 < 1\}$ و ضریب توانی σ_1 برابر با $\left\{ \sigma_1 = \frac{\sigma_2}{2 - \sigma_2} \right\}$ است.

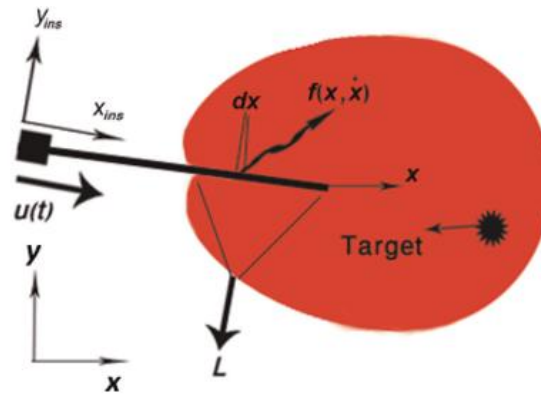
$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -\varepsilon_1 \text{sig}^{\sigma_1}(x_1(t)) - \varepsilon_2 \text{sig}^{\sigma_2}(x_2(t)) \\ \text{where } \text{sig}^{\sigma_i}(x_i(t)) \triangleq \text{sign}(x_i(t)) |x_i(t)|^{\sigma_i} \text{ for } i = 1, 2 \end{cases} \quad (4)$$

^۱Radially unbounded function

برای سیستم (۴) نشان داده شده است که اولاً نقطه‌ی تعادل $\{x_1 = x_2 = 0\}$ پایدار زمان-متناهی کلی است و ثانیاً با شروع از هر شرایط اولیه‌ی دلخواه و پس از گذشت مدت زمان متناهی قابل تنظیم T^* ، پاسخ‌های زمانی متغیرهای حالت دقیقاً صفر می‌شوند و همواره صفر باقی می‌مانند. رابطه‌ی (۵)، مقدار زمان متناهی T^* را ارائه می‌دهد. در (۵)، P و Q ماتریس‌های مثبت معین متقارن اختیاری می‌باشند که معادله‌ی جبری-ماتریسی لیاپانوف $\{PA + A^T P = -Q\}$ را برای ماتریس A برآورده می‌سازند. همچنین $\lambda_{\min}(Q)$ و $\lambda_{\max}(P)$ به ترتیب معرف بزرگترین و کوچکترین مقادیر ویژه‌ی ماتریس‌های $\{P \in \mathbb{R}^{2 \times 2}\}$ و $\{Q \in \mathbb{R}^{2 \times 2}\}$ هستند [۳۰ و ۲۹].

$$\begin{cases} T^* \leq \left(\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(Q)} \right) \left(\frac{\Phi^{\varpi}(\zeta(t=0))}{\varpi} \right) \text{ with } \varpi = \frac{1-\sigma_2}{\sigma_2} \\ \Phi(\zeta(t)) = \zeta(t)^T P \zeta(t) \text{ where } \zeta(t) = [x_1^{\sigma_1}(t), x_2^{\sigma_2}(t)]^T \end{cases} \text{ and } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\varepsilon_1 & -\varepsilon_2 \end{bmatrix} \quad (5)$$

لم ۴. سیستم غیرخطی مرتبه‌ی دوم (۶) را با نقطه‌ی تعادل $\{x_1 = x_2 = 0\}$ در نظر بگیرید که ضریب توانی ϱ ثابتی دلخواه در بازه‌ی $\{0 < \varrho < 1\}$ است. نقطه‌ی تعادل سیستم (۶) پایدار زمان-متناهی کلی بوده و چنانچه این سیستم با هر شرایط اولیه‌ی تحریک گردد، پاسخ‌های متغیرهای حالت آن بعد از سپری شدن زمان متناهی T^* دقیقاً به صفر رسیده و برای لحظات $\{t \geq T^*\}$ همواره صفر خواهند ماند.



شکل ۱. تصویر مفهومی از عملیات تزریق سوزن جراحی رباتیک در داخل بافت نرم پروستات [۱۹]

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -\text{sig}^{\varrho}(x_2(t)) - \text{sig}^{\varrho(2-\varrho)-1}(\ell(x_1, x_2)) \\ \text{sig}^{\varrho}(x_2(t)) \triangleq |x_2(t)|^{\varrho} \text{sign}(x_2(t)) \\ \text{sig}^{\varrho(2-\varrho)-1}(\ell(x_1, x_2)) \triangleq |\ell(x_1, x_2)|^{\varrho(2-\varrho)-1} \text{sign}(\ell(x_1, x_2)) \\ \ell(x_1, x_2) \triangleq x_1(t) + (2 - \varrho)^{-1} |x_2(t)|^{2-\varrho} \text{sign}(x_2(t)) \end{cases} \quad (6)$$

علاوه بر این، کران بالای زمان متناهی T^* با استفاده از نامساوی (۷) مشخص می‌گردد که κ_1 و κ_2 دو ضریب عددی ثابت با شرایط $\{0 < \kappa_1 < 1\}$ و $\{\kappa_2 > 1\}$ هستند [۲۹، ۳۰ و ۳۸].

$$\begin{cases} T^* \leq (Y(1 - \varrho))^{-1} (3 - \varrho) \left(\Omega(x_1(0), x_2(0)) \right)^{\frac{1-\varrho}{3-\varrho}} \\ \Omega(x_1, x_2) \triangleq \frac{2-\varrho}{3-\varrho} |\ell(x_1, x_2)|^{\frac{3-\varrho}{2-\varrho}} + \kappa_1 x_2(t) \ell(x_1, x_2) + \frac{\kappa_2}{3-\varrho} |x_2(t)|^{3-\varrho} \\ Y \triangleq - \max_{(x_1, x_2) \in \mathcal{E}} \dot{\Omega}(x_1, x_2) \text{ with } \mathcal{E} = \{(x_1, x_2) : \Omega(x_1, x_2) = 1\} \end{cases} \quad (7)$$

۳- معرفی مدل دینامیکی سیستم سوزن-بافت

در شکل ۱، پیکره بندی مرسوم (تصویر مفهومی) از روش تزریق سوزن در داخل بافت نرم پروستات نشان داده شده است. نویسندگان مقاله‌ی حاضر این شکل را مستقیماً و بدون تغییر از مرجع [۱۹] انتخاب کرده و در اینجا ارائه داده‌اند. شایان ذکر است که در این شکل، دو دستگاه مرجع $\{X - Y\}$ و $\{X_{ins} - Y_{ins}\}$ لحاظ شده‌اند. هدف از تزریق، حرکت و کنترل سوزن جراحی رباتیک برای رسیدن به نقطه‌ای است که در عمق بافت پروستات قرار دارد. چنانچه فرض حرکت خطی یک بعدی (نه چرخشی) برای سوزن جراحی رباتیک در نظر گرفته شود، مدل دینامیکی سیستم سوزن-بافت (در مختصات $\{X_{ins} - Y_{ins}\}$) به صورت معادله‌ی دیفرانسیلی-انتگرالی غیرخطی مرتبه‌ی دوم (λ) حاصل می‌شود که $x(t)$ نماد موقعیت نوک سوزن در مختصات تزریق و M بیانگر مقدار جرم سوزن است. در معادله‌ی (λ) ، نماد $\{x\}$ به مفهوم همان ضرب ماتریسی معمولی در ریاضیات می‌باشد. اگر نیرویی که بر طول $dx(t)$ توسط بافت به سوزن جراحی وارد می‌شود، در راستای دو محور X_{ins} و Y_{ins} تجزیه گردد، دو مؤلفه‌ی نیرویی غیرخطی حاصل می‌گردند. این دو مؤلفه، نقش درایه‌های بردار $f(x, \dot{x}) \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$ را دارند. در (λ) ، \vec{v} بردار واحد در امتداد جهت تزریق است که نیروی برداری $f(x, \dot{x})$ را در امتداد شفت سوزن تصویر می‌کند. $u(t)$ نماد نیرویی است که برای تزریق در بافت، به پایه‌ی سوزن وارد شده و نقش ورودی کنترلی را دارد.

$$M\ddot{x}(t) + \text{sign}(\dot{x}(t)) \left(\oint_L (\vec{v}^T \times f(x, \dot{x})) \right) = u(t) \quad (\lambda)$$

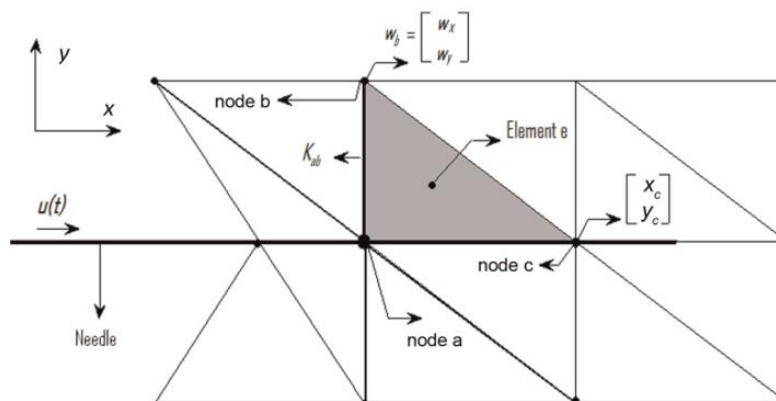
از آنجایی که تغییر شکل بافت و نیروی اعمالی آن به سوزن مرتبط با خواص مکانیکی بافت می‌باشد، روش قدرتمند اجزای محدود (Finite element method) برای تخمین نیروی اعمالی بافت به سوزن در مراجع [۲۱ و ۱۹] به کار رفته است.

شماتیک مفهومی از تحقق روش اجزای محدود و نیروهای متقابل سوزن و بافت در شکل ۲ نشان داده شده که بافت نرم مش بندی گردیده است. این شکل نیز مشابه با شکل قبلی از مرجع [۱۹] انتخاب و در اینجا آورده شده است. با اعمال روش اجزای محدود بر روی بافت، عبارت انتگرالی $\left\{ \oint_L (\vec{v}^T \times f(x, \dot{x})) dx \right\}$ به عبارت مجموعی $\left\{ \sum_{a=1}^{n(x)} (\vec{v}^T \times \vec{f}_a) \right\}$ تبدیل شده و رابطه‌ی (۹) حاصل می‌گردد.

$$M\ddot{x}(t) + \text{sign}(\dot{x}(t)) \left(\sum_{a=1}^{n(x)} (\vec{v}^T \times \vec{f}_a) \right) = u(t) \quad (9)$$

در معادله‌ی دیفرانسیلی غیرخطی (۹)، $\vec{f}_a \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$ بردار نیروی اعمالی توسط گره a از شبکه‌ی بافتی است که در تماس با سوزن می‌باشد. نماد $n(x)$ معرف تعداد گره‌های شبکه‌ی بافتی در تماس با سوزن و تابعی از متغیر x است. در هنگام تزریق‌های عمیق‌تر سوزن به بافت، تعداد گره‌های در تماس با سوزن افزایش می‌یابند. در مواردی که روش اجزای محدود مربوط به بافت خطی و دو بعدی باشد، آنگاه بردار نیروی اعمالی \vec{f}_a به هر گره تماسی برابر با مجموع ضرب ماتریس سختی محلی (Local stiffness matrix) در بردار جابجایی (از گره تماسی به گره مجاورتی) است. موضوع مورد اشاره به صورت (۱۰) قابل بیان است که $m(a)$ بیانگر تعداد گره‌های متصل به گره a می‌باشد.

$$\vec{f}_a = \sum_{b=1}^{m(a)} (K_{ab}(\theta) \times w_b) \quad \text{with} \quad w_b = \begin{bmatrix} w_{x_b} \\ w_{y_b} \end{bmatrix} \quad (10)$$



شکل ۲. شماییک مفهومی از تحقق روش اجزای محدود و نیروهای متقابل سوزن و بافت [۲۱ و ۱۹]

در (۱۰)، $K_{ab}(\theta) \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ماتریس سختی محلی بین گره a (گره در تماس با سوزن) و گره b (گره مجاور با گره a) در شبکه‌ی بافتی است. $w_b \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$ معرف بردار جابجایی گره مجاور است که داریه‌های آن، جابجایی گره b را در راستای محورهای X و Y توصیف می‌کنند. ماتریس سختی محلی $K_{ab}(\theta)$ به صورت (۱۱) تعریف می‌گردد. در (۱۱)، دو ثابت فیزیکی E و ν نامعلوم است و در نتیجه پارامترهای λ و μ هم ثابت و نامعلوم خواهند بود. بردار پارامترهای نامعلوم θ به صورت $\theta \triangleq [\lambda \ \mu]^T$ تعریف می‌گردد و بنابراین درایه‌های ماتریس K_{ab} تابعی از پارامترهای نامعلوم موجود در بردار θ هستند. در (۱۱)، T_H بیانگر ضخامت بافت، Δ توصیف کننده‌ی سطح هر عنصر مثلثی از شبکه‌ی بافتی، E نماد مدول یانگ، ν معرف نرخ پواسن، λ و μ نیز پارامترهای Lamé می‌باشند. هم‌چنین نمادهای $\alpha_a, \alpha_b, \beta_a, \beta_b$ از توابعی از موقعیت گره‌های عنصر مثلثی شبکه‌ی بافتی هستند. $\{X_a, X_b, X_c\}$ مختصات راستای X و $\{Y_a, Y_b, Y_c\}$ مختصات راستای Y مرتبط با گره‌های $\{a, b, c\}$ از عنصر e (قابل مشاهده در شکل ۲) هستند که مختصات مذکور نسبت به دستگاه مرجع $\{X - Y\}$ سنجیده شده‌اند.

$$\begin{cases} K_{ab}(\theta) = \frac{T_H}{4\Delta} \times B^T(a) \times D \times B(b) \\ B^T(a) = \begin{bmatrix} \alpha_a & 0 & \beta_a \\ 0 & \beta_a & \alpha_a \end{bmatrix}, B(b) = \begin{bmatrix} \alpha_b & 0 \\ 0 & \beta_b \\ \beta_b & \alpha_b \end{bmatrix} \text{ where } \begin{cases} \alpha_a \triangleq Y_b - Y_c \text{ and } \alpha_b \triangleq Y_c - Y_a \\ \beta_a \triangleq X_b - X_c \text{ and } \beta_b \triangleq X_c - X_a \\ \lambda \triangleq \frac{E\nu}{(1-\nu^2)} \text{ and } \mu \triangleq \frac{E(1-\nu)}{2(1-\nu^2)} \end{cases} \\ D = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \end{cases} \quad (11)$$

بالحاظ کردن روابط (۱۰) و (۱۱)، معادله‌ی دینامیکی سیستم سوزن-بافت به صورت (۱۲) نتیجه می‌گردد.

$$M\ddot{x}(t) + \text{sign}(\dot{x}(t)) \left(\sum_{a=1}^{n(x)} \sum_{b=1}^{m(a)} (\vec{v}^T \times (K_{ab}(\theta) \times w_b)) \right) = u(t) \quad (12)$$

ویژگی ۱. عبارت $\left\{ \text{sign}(\dot{x}(t)) \left(\sum_{a=1}^{n(x)} \sum_{b=1}^{m(a)} (\vec{v}^T \times (K_{ab}(\theta) \times w_b)) \right) \right\}$ قابل تبدیل شدن به فرم رگرسوری خطی در پارامتر (۱۳) است [۱۹ و ۲۱]. در این فرم رگرسوری، $\varphi \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ و $\theta \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$ به ترتیب ماتریس رگرسور (کاملاً معلوم) و بردار پارامترهای ثابت (کاملاً نامعلوم) سیستم دینامیکی سوزن-بافت را نشان می‌دهند. درایه‌های $y_{ab}(w_b) \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ تابعی از تغییر شکل بافت و موقعیت گره‌های مش بافتی هستند.

$$\begin{cases} \text{sign}(\dot{x}(t)) \left(\sum_{a=1}^{n(x)} \sum_{b=1}^{m(a)} (\vec{v}^T \times (K_{ab}(\theta) \times w_b)) \right) = \vec{v}^T \times \varphi \times \theta \\ \varphi \triangleq \text{sign}(\dot{x}) \sum_{a=1}^{n(x)} \sum_{b=1}^{m(a)} y_{ab}(w_b) \quad \text{and} \quad \theta \triangleq [\lambda \ \mu]^T \\ y_{ab}(w_b) = \begin{bmatrix} w_{y_b} \beta_b \alpha_a + w_{x_b} \alpha_a \alpha_b & w_{y_b} \beta_a \alpha_b + 2w_{x_b} \alpha_a \alpha_b + w_{x_b} \beta_a \beta_b \\ w_{x_b} \beta_a \alpha_b + w_{y_b} \beta_a \beta_b & w_{x_b} \beta_b \alpha_a + 2w_{y_b} \beta_a \beta_b + w_{y_b} \alpha_a \alpha_b \end{bmatrix} \end{cases} \quad (13)$$

چنانچه عبارت $\{\vec{v}^T \times \varphi \times \theta\}$ که بیانگر $\{\varphi \times \theta\}$ در راستای بردار \vec{v}^T (جهت تزریق) است، به صورت $\{\varphi_v \times \theta\}$ مختصر گردد، مدل سیستم دینامیکی سوزن-بافت (۹) به صورت $\{M\ddot{x}(t) + (\varphi_v \times \theta) = u(t)\}$ نتیجه می شود. بدیهی است که φ_v برداری سطری با دو ستون است. برای داشتن مدل واقع بینانه تری از حرکت سوزن جراحی داخل بافت، می توان عبارت نامعینی $\tau_{\text{dis}}(t)$ را به $\{M\ddot{x}(t) + (\varphi_v \times \theta) = u(t)\}$ اضافه کرد. عبارت جمعی $\tau_{\text{dis}}(t)$ می تواند ناشی از اغتشاش خارجی یا دینامیک های مدل نشده ی سیستم سوزن-بافت باشد. در نهایت، مدل دینامیکی سیستم سوزن-بافت به صورت معادله دیفرانسیلی غیرخطی مرتبه ی دوم (۱۴) حاصل می گردد.

$$M\ddot{x}(t) + \{\varphi_v \times \theta\} + \tau_{\text{dis}}(t) = u(t) \quad (14)$$

۴- فرمول بندی مسئله ی هدایت زمان-متناهی سوزن جراحی

با انتخاب متغیرهای حالت $\{x_1(t) \triangleq x(t), x_2(t) \triangleq \dot{x}(t)\}$ و لحاظ کردن تعاریف $\{h \triangleq M^{-1}\}$ و $\{d(t) \triangleq M^{-1}\tau_{\text{dis}}(t)\}$ مدل دینامیکی سیستم سوزن-بافت (۱۴) به نمایش فضای حالت غیرخطی (۱۵) تبدیل می شود.

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -h(\varphi_v \times \theta) + d(t) + hu(t) \end{cases} \quad (15)$$

فرض ۱. عبارت نامعینی $\tau_{\text{dis}}(t)$ همواره نامساوی $\{|\tau_{\text{dis}}(t)| \leq \xi\}$ را برآورده می سازد که ξ ثابتی نامعلوم می باشد. در نتیجه $d(t)$ نیز همواره در نامساوی $\{|d(t)| = |M^{-1}||\tau_{\text{dis}}(t)| \leq h\xi = \gamma\}$ صدق می کند و γ ثابتی مثبت و نامعلوم است که نمی توان مستقیماً از آن در طراحی ورودی کنترلی استفاده کرد.

فرض ۲. برای بردار $\theta \triangleq [\lambda, \mu]^T$ که حاوی ثابت های فیزیکی نامعلوم مدل دینامیکی سیستم سوزن-بافت است، فرض می شود که همواره نامساوی $\|\theta\| < \eta$ برقرار بوده و η ثابتی نامعلوم می باشد. باید توجه داشت که نمی توان مستقیماً از ثابت نامعلوم η در طراحی ورودی کنترلی استفاده کرد.

فرض ۳. مسیر مورد نظر $x_{d1}(t)$ درون بافت (متناظر با متغیر حالت اول x_1)، از قبل تعیین شده و به صورت تحلیلی در اختیار است. با توجه به ماهیت دو انتگرال گیره بودن مدل فضای حالت سیستم غیرخطی سوزن-بافت، مسیر مورد نظر $x_{d2}(t)$ (متناظر با متغیر حالت دوم x_2)، باید برابر با مشتق مسیر مورد نظر متغیر حالت اول به صورت $\{x_{d2}(t) = \dot{x}_{d1}(t)\}$ انتخاب شود.

فرض ۴. مسیر مورد نظر $x_{d1}(t)$ حداقل تا دو بار پیوسته و مشتق پذیر است. بنابراین در سراسر مقاله ی حاضر فرض می شود که $x_{d1}(t)$ ، $\dot{x}_{d1}(t)$ و $\ddot{x}_{d1}(t)$ از قبل تعیین شده و به صورت تحلیلی در اختیار می باشند و می توان از آن ها مستقیماً در طراحی ورودی کنترلی استفاده کرد.

برای برآورده شدن هدف هدایت زمان-متناهی سوزن درون، ورودی کنترلی $u(t)$ باید چنان طراحی گردد تا متغیر حالت $x_1(t)$ بعد از سپری شدن زمان متناهی T^* دقیقاً به مسیر مورد نظر $x_{d1}(t)$ برسد و سپس بدون هیچ گونه خطای ردیابی آن را دنبال کند. بنابراین ورودی کنترلی $u(t)$ بایستی به منظور فراهم ساختن شرایط (۱۶) طراحی گردد.

$$\left\{ \lim_{t \rightarrow T^*} x_1(t) = x_{d_1}(t) \right\}, \text{ and } \{x_1(t) = x_{d_1}(t) \text{ for } t \geq T^*\} \quad (16)$$

با تعریف خطاهای ردیابی $e_1(t)$ و $e_2(t)$ به صورت $\{e_1(t) \triangleq x_1(t) - x_{d_1}(t) \text{ and } e_2(t) \triangleq x_2(t) - x_{d_2}(t)\}$ مشتق گیری زمانی از این خطاهای ردیابی و استفاده از معادلات فضای حالت (۱۵)، سیستم دینامیکی خطاهای ردیابی سیستم سوزن-بافت به صورت (۱۷) نتیجه می شود.

$$\begin{cases} \dot{e}_1(t) = e_2(t) \\ \dot{e}_2(t) = -h(\varphi_v \times \theta) + d(t) + hu(t) - \ddot{x}_{d_1}(t) \end{cases} \quad (17)$$

بدیهی است که هدایت زمان-متناهی سوزن (۱۶) معادل و هم ارز با مسئله ی پایدارسازی زمان-متناهی کلی سیستم دینامیکی خطاهای ردیابی (۱۷) است. بنابراین ورودی کنترلی $u(t)$ چنان طراحی می گردد که شرایط (۱۸) برآورده شوند.

$$\begin{cases} \lim_{t \rightarrow T^*} e_1(t) = 0 \text{ and } \{e_1(t) = 0 \text{ for } t \geq T^*\} \\ \lim_{t \rightarrow T^*} e_2(t) = 0 \text{ and } \{e_2(t) = 0 \text{ for } t \geq T^*\} \end{cases} \quad (18)$$

۵- طراحی ساختار کنترلی غیرخطی مقاوم-تطبیقی زمان-متناهی

در سال های اخیر رویکرد کنترل مد لغزشی پایاندار [۳۶-۳۸] بر اساس همان کنترل مد لغزشی معمولی پایه گذاری شده اند و خمینه های لغزشی غیرخطی جایگزین سطوح لغزشی خطی گردیده اند [۳۵-۳۰]. فرآیند طراحی کنترل کننده های غیرخطی-مقاوم با روش کنترل مد لغزشی پایاندار شامل دو گام اساسی است [۳۱-۲۹]. در گام اول، خمینه ی لغزشی غیرخطی مناسب $s(t)$ به منظور پایداری زمان-متناهی دینامیک مد لغزشی $\{s(t) = \dot{s}(t) = 0\}$ تعریف می شود. در این گام، خمینه ی لغزشی غیرخطی $s(t)$ چنان پیشنهاد می گردد که سیستم دینامیکی مد لغزشی حاصله از $\{s(t) = \dot{s}(t) = 0\}$ دارای پایداری زمان-متناهی کلی است و تمامی خطاهای ردیابی سیستم (۱۷) که بر روی دینامیک مد لغزشی $\{s(t) = \dot{s}(t) = 0\}$ قرار گرفته اند، بعد از طی شدن مدت زمان متناهی T_{settling}^* دقیقاً صفر گردند. در گام دوم، ورودی کنترلی با هدف رساندن خطاهای ردیابی سیستم (۱۷) به دینامیک مد لغزشی $\{s(t) = \dot{s}(t) = 0\}$ طراحی می گردد. به عبارت دیگر، در این گام کنترل کننده ی $u(t)$ باید به نحوی طراحی شود که پس از گذشت مدت زمان متناهی T_{reaching}^* (که زمان رسیدن نام دارد)، خطاهای ردیابی بر روی دینامیک مد لغزشی $\{s(t) = \dot{s}(t) = 0\}$ قرار گیرند. بنابراین می توان نتیجه گرفت که هدف هدایت زمان-متناهی سوزن که به صورت (۱۸) بیان شده، پس از گذشت مدت زمان متناهی کلی $\{T^* \leq (T_{\text{settling}}^* + T_{\text{reaching}}^*)\}$ ، تحقق می یابد. نویسندگان مقاله ی حاضر توضیحات کامل و مبسوطی در مورد کنترل مد لغزشی پایاندار شامل ویژگی های ذاتی این روش و نحوه ی طراحی کنترل کننده های غیرخطی با آن در مراجع [۳۰ و ۲۵] ارائه داده اند.

به منظور برآورده ساختن هدف هدایت زمان-متناهی سوزن جراحی (۱۸)، کنترل کننده های غیرخطی مقاوم-تطبیقی با استفاده از تعمیم روش کنترل مد لغزشی پایاندار و ترکیب آن با رویکرد کنترل تطبیقی طراحی می گردند. کنترل مد لغزشی پایاندار نقش اصلی و بنیادی در طراحی کنترل کننده های فوق الذکر دارد زیرا اولاً پایداری زمان-متناهی را برای سیستم حلقه بسته ی سوزن-بافت تضمین کرده و ثانیاً ویژگی مقاوم بودن ساختار کنترلی پیشنهادی را در برابر عدم قطعیت مدل سازی و اغتشاش فراهم می سازد. در اینجا منظور از تعمیم کنترل مد لغزشی پایاندار، تعریف چندین خمینه ی لغزشی غیرخطی ابتکاری است که یکی از نوآوری مقاله ی حاضر در مقایسه با دیگر مقاله های مرتبط [۱۴-۶، ۲۵ و ۲۷]، به شمار می آید. باید توجه داشت که راهکار کنترل تطبیقی، نقش جانبی (فرعی) در ساختار کنترلی غیرخطی پیشنهادی برای سیستم دینامیکی سوزن-بافت دارد. بر اساس مفاهیم کنترل تطبیقی، قوانین

به روزرسانی برای تخمین بردار نامعلوم $\theta \triangleq [\lambda, \mu]^T$ و دو کران ثابت نامشخص $\{\gamma, \eta\}$ طراحی می‌شوند و پاسخ‌های زمانی این تخمین‌ها همگی بعد از سپری شدن زمان متناهی دقیقاً به مقادیر ثابتی همگرا می‌گردند.

۱-۵- اولین ساختار کنترلی پیشنهادی برای سیستم سوزن-بافت

برای اولین ساختار، خمینه لغزشی غیرخطی $s(t)$ به صورت (۱۹) پیشنهاد می‌گردد که l_1 و l_2 ضرایب اختیاری مثبت با شرط $\{l_1 > l_2 > 0\}$ می‌باشند.

$$s(t) = e_2(t) + \int_0^t l_1 \text{sign}(e_1(\tau)) d\tau + \int_0^t l_2 \text{sign}(e_2(\tau)) d\tau \quad (19)$$

برای این ساختار کنترلی، ورودی $u(t) \in \mathbb{R}$ مطابق با رابطه (۲۰) پیشنهاد می‌شود که k_1 و k_2 دو ضریب مثبت اختیاری هستند.

$$\begin{cases} u(t) = h^{-1}(\ddot{x}_{d_1}(t) - l_1 \text{sign}(e_1(t)) - l_2 \text{sign}(e_2(t)) + u_+) \\ u_+ = -k_1 s(t) - (\hat{\gamma}(t) + k_2) \text{sign}(s(t)) + h(\varphi_v \times \hat{\theta}(t)) + u_{++} \\ u_{++} = -h \|\varphi_v^T(t)\| \|\hat{\theta}(t)\| \text{sign}(s(t)) - h \hat{\eta}(t) \|\varphi_v^T(t)\| \text{sign}(s(t)) \end{cases} \quad (20)$$

با $\hat{\gamma}(t)$ و $\hat{\theta}(t) \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$ به ترتیب تخمین‌هایی از بردار نامعلوم $\theta \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$ و اسکالره‌های نامشخص γ و η هستند که با انتگرال‌گیری از قوانین به‌روزرسانی (۲۱) حاصل می‌شوند. شایان ذکر است که این قوانین، همگی از نوع معادلات دیفرانسیلی غیرخطی مرتبه اول هستند. در قانون به‌روزرسانی مرتبط با $\hat{\theta}(t)$ ، نماد $\Gamma \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ بیانگر یک ماتریس قطری مثبت معین دلخواه است و می‌توان با انتخاب مناسب این ماتریس وزنی، سرعت همگرایی $\hat{\theta}(t)$ به برداری ثابت را بهبود بخشید.

$$\begin{cases} \dot{\hat{\theta}}(t) = -h \Gamma^{-1} \varphi_v^T(t) s(t) \\ \dot{\hat{\gamma}}(t) = |s(t)| \quad \text{with } \hat{\gamma}(0) > 0 \\ \dot{\hat{\eta}}(t) = h \|\varphi_v^T(t)\| |s(t)| \quad \text{with } \hat{\eta}(0) > 0 \end{cases} \quad (21)$$

یادآوری ۱. با استناد به قوانین (۲۱)، به طور صریح نتیجه می‌شود که توابع تخمینی اسکالری $\hat{\gamma}(t)$ و $\hat{\eta}(t)$ همواره برای تمام لحظه‌ها مثبت هستند.

قضیه ۱. سیستم دینامیکی سوزن-بافت (۱۵) را با همه‌ی فرض‌ها و ویژگی‌های ذکر شده در نظر بگیرید. با اعمال کنترل‌کننده‌ی غیرخطی (۲۰) به سیستم (۱۵)، نتایج (الف)، (ب)، (پ) و (ت) حاصل می‌گردد. (الف): سیستم حلقه‌بسته‌ی سوزن-بافت پایدار زمان-متناهی کلی بوده و خطاهای ردیابی $e_1(t)$ و $e_2(t)$ بعد از سپری شدن زمان متناهی $\{T^* \leq T_{\text{settling}}^* + T_{\text{reaching}}^*\}$ دقیقاً به صفر می‌رسند و برای $\{t \geq T^*\}$ همواره صفر خواهند ماند. (ب): کران‌های بالا برای دو زمان متناهی T_{settling}^* و T_{reaching}^* توسط نامساوی‌های (۲۲) و (۲۳) تعیین می‌شوند. (پ): هر دو درایه‌ی بردار تخمینی $\hat{\theta}(t) \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$ همواره کراندار بوده و این بردار تخمینی بعد از گذشت مدت زمان متناهی T^* دقیقاً به بردار ثابت $\theta_{T^*} \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$ می‌رسد که لزوماً با بردار اسمی ثابت‌های نامعلوم $\theta \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$ برابر نیست. (ت): دو تابع تخمینی اسکالری $\hat{\gamma}(t)$ و $\hat{\eta}(t)$ همواره کراندار است و بعد از سپری شدن مدت زمان متناهی T^* دقیقاً به مقادیر ثابت γ_{T^*} و η_{T^*} می‌رسند که لزوماً با مقادیر اسمی نامعلوم γ و η یکسان نیستند.

$$\begin{cases} T_{\text{reaching}}^* \leq (\xi \sqrt{\Lambda})^{-1} \sqrt{(s^2(t=0) + \frac{1}{\Lambda}(\hat{\eta}(t=0) - \bar{\eta})^2 + \frac{1}{\Lambda}(\hat{\gamma}(t=0) - \bar{\gamma})^2)} \\ \left\{ H_1 \triangleq \left(\frac{1}{\Lambda} - 1\right) |s(t)| \right\} \text{ and } \left\{ H_2 \triangleq \left(\frac{1}{\Lambda} - 1\right) h \|\varphi_v^T(t)\| |s(t)| \right\} \\ \left\{ \xi \triangleq \min_t(k_2, H_1, H_2) \right\} \end{cases} \quad (22)$$

در نامساوی (۲۲)، Λ ثابتی اختیاری در بازه $\{0 < \Lambda < 1\}$ بوده و $\bar{\eta}$ و $\bar{\gamma}$ دو عدد مثبت دلخواه به اندازه‌ی کافی بزرگ هستند که $\{\hat{\eta}(t) \leq \bar{\eta}\}$ و $\{\hat{\gamma}(t) \leq \bar{\gamma}\}$ را برآورده می‌سازند. در نامساوی (۲۳)، ضریب l_3 با استفاده از $\{l_3 = l_1 + l_2 \text{sign}(e_1 e_2)\}$ تعیین می‌شود و \bar{l}_1 ثابت دلخواهی است که بایستی از نامساوی $\left\{ \left(\sqrt{2(l_1 + l_2)} \right)^{-1} < \bar{l}_1 < \left(\sqrt{2(l_1 - l_2)} \right)^{-1} \right\}$ انتخاب شود.

$$\begin{cases} T_{\text{settling}}^* \leq 2(\min(l_4))^{-1} \sqrt{\Psi(e_1(t = T_{\text{reaching}}^*), e_2(t = T_{\text{reaching}}^*))} \\ \Psi(e_1, e_2) = \begin{cases} 0.25(l_4)^2 (\mathfrak{D}(e_1, e_2))^2 & \text{if } e_1 e_2 \neq 0 \\ 0.25(\bar{l}_1)^2 e_2^2(t) & \text{if } e_1 = 0 \\ 0.25|e_1(t)| & \text{if } e_2 = 0 \end{cases} \\ \mathfrak{D}(e_1, e_2) = (l_3)^{-1} e_2(t) \text{sign}(e_1(t)) + l_5 \sqrt{|e_1(t)|} + 0.5(l_3)^{-1} e_2^2(t) \end{cases} \quad (23)$$

علاوه بر این، ضرایب l_4 و l_5 با استفاده از $\{l_4 = \sqrt{0.5l_3} |\sqrt{2l_3} \bar{l}_1 - 1|\}$ و $\{l_5 = \sqrt{2(l_3)^{-1}} (\sqrt{2l_3} \bar{l}_1 - 1)^{-1} \text{sign}(e_1 e_2)\}$ تعیین می‌گردند. \square

اثبات ۱. این اثبات از چهار مرحله‌ی اصلی و متوالی تشکیل شده است. در مرحله‌ی اول، دو خطای تخمینی $\{\bar{\theta}(t) \triangleq \hat{\theta}(t) - \theta\}$ و $\{\bar{\gamma}(t) \triangleq \hat{\gamma}(t) - \gamma\}$ تعریف می‌گردند. با توجه به ثابت بودن بردار θ و اسکالر γ ، مشتق‌گیری زمانی از این خطاهای تخمینی، دو تساوی $\dot{\bar{\theta}}(t) = \dot{\hat{\theta}}(t)$ و $\dot{\bar{\gamma}}(t) = \dot{\hat{\gamma}}(t)$ را نتیجه می‌دهد. تابع کاندیدای لیاپانوف در مرحله‌ی اول، به صورت $V_1(s(t), \bar{\gamma}(t), \bar{\theta}(t)) = 0.5(s^2(t) + \bar{\gamma}^2(t) + \bar{\theta}^T(t) \Gamma^{-1} \bar{\theta}(t))$ انتخاب شده که همواره مثبت بوده و شرط $\{V_1(0, 0, \mathbf{0}_{2 \times 1}) = 0\}$ برقرار است. مشتق زمانی $V_1(t)$ به صورت $\dot{V}_1(t) = (s(t)\dot{s}(t) + \bar{\gamma}(t)\dot{\bar{\gamma}}(t) + \bar{\theta}^T(t) \Gamma^{-1} \dot{\bar{\theta}}(t))$ نتیجه می‌گردد. چنانچه از (۱۹) مشتق‌گیری شود، مشتق زمانی $s(t)$ یعنی $\{s(t) = \dot{e}_2(t) - l_1 \text{sign}(e_1(t)) - l_2 \text{sign}(e_2(t))\}$ بدست می‌آید. با جایگذاری عبارت‌های مشتقی $s(t)$ ، $\dot{\bar{\gamma}}(t)$ و $\dot{\bar{\theta}}(t)$ در $\dot{V}_1(t)$ ، تساوی (۲۴) حاصل می‌شود.

$$\dot{V}_1(t) = s(t) (\dot{e}_2(t) - l_1 \text{sign}(e_1(t)) - l_2 \text{sign}(e_2(t))) + \bar{\gamma} |s(t)| - h \bar{\theta}^T(t) \varphi_v^T(t) s(t) \quad (24)$$

با جایگذاری $\dot{e}_2(t)$ از (۱۷) در (۲۴) و سپس اعمال ورودی کنترلی $u(t)$ از (۲۰)، عبارت ساده شده‌ی \dot{V}_1 به صورت (۲۵) حاصل می‌گردد.

$$\dot{V}_1(t) = -h s(t) \varphi_v(t) \theta + s(t) d(t) + s(t) u_+(t) + \bar{\gamma} |s(t)| - h \bar{\theta}^T(t) \varphi_v^T(t) s(t) \quad (25)$$

با جایگذاری $u_+(t)$ از (۲۰) در (۲۵)، اعمال نامساوی $\{s(t)d(t) \leq |s(t)||d(t)| \leq \gamma |s(t)|\}$ و استفاده از تساوی ریاضیاتی $\{s(t) \text{sign}(s(t)) = |s(t)|\}$ نامساوی (۲۶) استخراج می‌شود.

$$\dot{V}_1(t) \leq \{-k_1 s^2(t) - k_2 |s(t)| + h s(t) \varphi_v(t) (\hat{\theta}(t) - \theta) + |s(t)| (\gamma - \hat{\gamma}(t)) + \bar{\gamma} |s(t)| - h \bar{\theta}^T(t) \varphi_v^T(t) s(t) + s(t) u_{++}(t)\} \quad (26)$$

با استناد به دو تعریف $\{\bar{\theta}(t) \triangleq \hat{\theta}(t) - \theta\}$ و $\{\bar{\gamma}(t) \triangleq \hat{\gamma}(t) - \gamma\}$ ، نامساوی (۲۶) به صورت ساده شده‌ی $\dot{V}_1(t) \leq \{-k_1 s^2(t) - k_2 |s(t)| + s(t) u_{++}(t)\}$ نتیجه می‌شود. چنانچه $u_{++}(t)$ از (۲۰) در نامساوی اخیر جایگذاری گردد، آنگاه نامساوی (۲۷) حاصل می‌شود.

$$\dot{V}_1(t) \leq \{-k_1 s^2(t) - k_2 |s(t)| - h \|\varphi_v^T(t)\| \|\hat{\theta}(t)\| |s(t)| - h \hat{\eta}(t) \|\varphi_v^T(t)\| |s(t)|\} \quad (27)$$

با استناد به یادآوری ۱، تابع تخمینی اسکالری $\hat{\eta}(t)$ همواره مثبت بوده و در نتیجه دو عبارت $\{-h\|\varphi_v^T(t)\|\|\hat{\theta}(t)\|\|s(t)\|\}$ و $\{\dot{V}_1(t) \leq -k_1s^2(t) - k_2|s(t)|\}$ همواره منفی هستند. بنابراین نامساوی (۲۷) به فرم ساده شده $\{V_1(t) \leq -k_1s^2(t) - k_2|s(t)|\}$ قابل بیان است. با توجه تابع کاندیدای لیاپانوف $V_1(t) = 0.5(s^2(t) + \tilde{\gamma}^2(t) + \tilde{\theta}^T(t)\Gamma^{-1}\tilde{\theta}(t))$ ، در نظر گرفتن نامساوی $\{\dot{V}_1(t) \leq -k_1s^2(t) - k_2|s(t)|\}$ و استناد به قضیه‌ی اساسی پایداری لیاپانوف، می‌توان نتیجه گرفت که هر دو درایه‌ی بردار $(\tilde{\theta}(t), \tilde{\gamma}(t))$ تابع اسکالری $\tilde{\gamma}(t)$ و خمینه‌ی لغزشی غیرخطی $s(t)$ همواره کراندارند. با روابط استخراجی فعلی، هم‌چنین می‌توان دریافت که خمینه‌ی لغزشی غیرخطی $s(t)$ به صورت مجانبی به صفر $\lim_{t \rightarrow \infty} s(t) = 0$ همگرا می‌گردد. علاوه بر این با توجه به تعاریف $\{\tilde{\gamma} \triangleq \hat{\gamma} - \gamma\}$ ، $\{\tilde{\theta} \triangleq \hat{\theta} - \theta\}$ ثابت بودن بردار θ و اسکالر γ ، می‌توان فهمید که درایه‌های بردار تخمینی $\hat{\theta}(t)$ و تابع تخمینی اسکالری $\hat{\gamma}(t)$ نیز همواره کراندار بوده و برای بردار $\hat{\theta}(t)$ و اسکالر $\hat{\gamma}(t)$ رابطه‌های حدی $\{\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{\theta}(t) = \theta_{T^*}\}$ و $\{\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{\gamma}(t) = \gamma_{T^*}\}$ برقرار می‌باشند. در مرحله‌ی سوم اثبات نشان داده خواهد شد که برای دو رابطه‌ی اخیر نیاز به میل کردن t به بی‌نهایت نیست و بعد از گذشت زمان متناهی T^* نیز این دو رابطه‌ی حدی صادق هستند. شایان ذکر است که لزوماً $\theta_{T^*} \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$ و $\gamma_{T^*} \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$ با بردار نامی $\theta \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$ و مقدار واقعی γ برابر نیستند. از آنجایی که اثبات گردید $\hat{\gamma}(t)$ کراندار است، می‌توان فرض کرد که عدد ثابت (به اندازه‌ی کافی بزرگ) $\bar{\gamma}$ چنان وجود دارد که همواره نامساوی $\{\hat{\gamma}(t) < \bar{\gamma}\}$ برقرار باشد. بدون از دست دادن کلیت فرض می‌گردد که عدد ثابت $\bar{\gamma}$ از مقدار نامعلوم γ نیز بزرگ‌تر بوده و همواره نامساوی $\{\gamma < \bar{\gamma}\}$ برقرار است.

برای مرحله‌ی دوم اثبات، $\tilde{\eta}(t)$ به صورت $\{\tilde{\eta}(t) \triangleq \hat{\eta}(t) - \eta\}$ تعریف شده که با توجه به ثابت بودن η ، مشتق آن $\{\dot{\tilde{\eta}}(t) = \dot{\hat{\eta}}(t)\}$ است. در این مرحله، کاندیدای لیاپانوف دوم $V_2(s(t), \tilde{\gamma}(t), \tilde{\eta}(t)) = 0.5(s^2(t) + \tilde{\gamma}^2(t) + \tilde{\eta}^2(t))$ انتخاب شده که همواره مثبت بوده، $V_2(0,0,0_{2 \times 1}) = 0$ و مشتق زمانی آن $\dot{V}_2(t) = (s(t)\dot{s}(t) + \tilde{\gamma}(t)\dot{\tilde{\gamma}}(t) + \tilde{\eta}(t)\dot{\tilde{\eta}}(t))$ می‌باشد. با اعمال عبارات مشتقی $\dot{\tilde{\gamma}}(t)$ ، $\dot{\tilde{\eta}}(t)$ و $\dot{s}(t)$ آنگاه $\dot{V}_2(t) = s(t)(\dot{e}_2(t) - l_1\text{sign}(e_1(t)) - l_2\text{sign}(e_2(t))) + \tilde{\gamma}|s(t)| + \tilde{\eta}(t)\dot{\tilde{\eta}}(t)$ و لحاظ کردن دو حقیقت ریاضی $\{s(t)d(t) \leq |s(t)||d(t)| \leq \gamma|s(t)|\}$ و $\{s(t)\text{sign}(s(t)) = |s(t)|\}$ نامساوی (۲۸) برای $\dot{V}_2(t)$ بدست می‌آید.

$$\dot{V}_2(t) \leq \{-k_1s^2(t) - k_2|s(t)| + |s(t)|(\gamma - \hat{\gamma}(t)) + |s(t)|\tilde{\gamma}(t) + s(t)u_{++}(t) - h s(t)\varphi_v(t)\theta + hs(t)\varphi_v(t)\hat{\theta}(t) + h\tilde{\eta}(t)\|\varphi_v^T(t)\|\|s(t)\|\} \quad (28)$$

با توجه به $\{\tilde{\gamma} \triangleq \hat{\gamma} - \gamma\}$ و اعمال دو نامساوی $\{-h s(t)\varphi_v(t)\theta \leq h|s(t)|\|\varphi_v^T(t)\|\|\theta\| \leq h\eta|s(t)|\|\varphi_v^T(t)\|\}$ و $\{h s(t)\varphi_v(t)\hat{\theta}(t) \leq h|s(t)|\|\varphi_v^T(t)\|\|\hat{\theta}(t)\|\}$ رابطه‌ی (۲۸) به نامساوی ساده شده‌ی (۲۹) تبدیل می‌شود.

$$\dot{V}_2(t) \leq \{-k_1s^2(t) - k_2|s(t)| + h|s(t)|\|\varphi_v^T(t)\|(\eta + \tilde{\eta}(t)) + h|s(t)|\|\varphi_v^T(t)\|\|\hat{\theta}(t)\| + s(t)u_{++}(t)\} \quad (29)$$

با جایگذاری u_{++} از (۲۱) در نامساوی (۲۹)، لحاظ کردن تساوی $\{s(t)\text{sign}(s(t)) = |s(t)|\}$ و در نظر گرفتن تعریف $\{\tilde{\eta}(t) \triangleq \hat{\eta}(t) - \eta\}$ نامساوی ساده شده‌ی $\{\dot{V}_2(t) \leq -k_1s^2(t) - k_2|s(t)|\}$ نتیجه می‌شود. مشابه با استدلال انتهایی مرحله‌ی اول، می‌توان نتیجه گرفت که خطای تخمینی $\tilde{\eta}(t)$ همواره کراندار است. با توجه به تعریف $\{\tilde{\eta}(t) \triangleq \hat{\eta}(t) - \eta\}$ و ثابت بودن η ، بدیهی است که تابع تخمینی اسکالری $\hat{\eta}(t)$ نیز همواره کراندار می‌باشد. علاوه بر این می‌توان دریافت که برای $\hat{\eta}(t)$ رابطه‌ی حدی $\{\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{\eta}(t) = \eta_{T^*}\}$ برقرار بوده که لزوماً η_{T^*} با مقدار اسمی نامعلوم η برابر نیست. در مرحله‌ی بعدی اثبات نشان داده خواهد شد که برای رابطه‌ی اخیر نیاز به میل کردن t به بی‌نهایت نیست و بعد از گذشت زمان متناهی T^* نیز این رابطه‌ی حدی برقرار است. باتوجه به کراندار بودن $\hat{\eta}(t)$ ، می‌توان فرض کرد عدد ثابت (به اندازه‌ی کافی بزرگ) $\bar{\eta}$ چنان وجود دارد که همواره نامساوی

$\{\hat{\eta}(t) < \bar{\eta}\}$ صادق می‌باشد. بدون از دست دادن کلیت فرض خواهد شد که $\bar{\eta}$ از مقدار ثابت نامعلوم η نیز بزرگ تر بوده و همواره نامساوی $\{\eta < \bar{\eta}\}$ برقرار است.

برای مرحله‌ی سوّم اثبات، دو تابع اسکالری $\tilde{\gamma}(t)$ و $\tilde{\eta}(t)$ به صورت $\{\tilde{\gamma}(t) \triangleq \hat{\gamma}(t) - \bar{\gamma}\}$ و $\{\tilde{\eta}(t) \triangleq \hat{\eta}(t) - \bar{\eta}\}$ تعریف می‌گردند. با استناد به دو نامساوی $\{\hat{\gamma}(t) < \bar{\gamma}\}$ و $\{\hat{\eta}(t) < \bar{\eta}\}$ ، واضح است که این دو تابع اسکالری همواره منفی هستند. با مشتق‌گیری از $\tilde{\eta}(t)$ و $\tilde{\gamma}(t)$ و ثابت بودن $\bar{\gamma}$ و $\bar{\eta}$ ، دو تساوی مشتقی $\dot{\tilde{\gamma}}(t) = \dot{\hat{\gamma}}(t)$ و $\dot{\tilde{\eta}}(t) = \dot{\hat{\eta}}(t)$ نتیجه می‌گردند. تابع کاندیدای لیاپانوف سوّم به صورت $V_3(s(t), \tilde{\gamma}(t), \tilde{\eta}(t)) = 0.5(s^2(t) + \frac{1}{\Lambda} \tilde{\gamma}^2(t) + \frac{1}{\Lambda} \tilde{\eta}^2(t))$ انتخاب گردیده که Λ ضریبی دلخواه در بازه‌ی $\{0 < \Lambda < 1\}$ است. تابع کاندیدای لیاپانوف سوّم همواره مثبت بوده و $\{V_3(0,0,0) = 0\}$ می‌باشد. مشتق زمانی $V_3(t)$ به صورت $\dot{V}_3(t) = (s(t)\dot{s}(t) + \frac{1}{\Lambda} \tilde{\gamma}(t)\dot{\tilde{\gamma}}(t) + \frac{1}{\Lambda} \tilde{\eta}(t)\dot{\tilde{\eta}}(t))$ قابل بیان است. با جایگذاری $\dot{\tilde{\gamma}}(t)$ ، $\dot{\tilde{\eta}}(t)$ و $\dot{s}(t)$ آنگاه $\dot{V}_3(t) = s(t) (\dot{e}_2(t) - l_1 \text{sign}(e_1(t)) - l_2 \text{sign}(e_2(t))) + \frac{1}{\Lambda} \tilde{\gamma}(t)|s(t)| + \frac{1}{\Lambda} \tilde{\eta}(t)h \|\varphi_v^T(t)\| |s(t)|$ مشابه با روابط (۲۴) و (۲۵)، نامساوی (۳۰) برای $\dot{V}_3(t)$ استخراج می‌شود.

$$\dot{V}_3(t) \leq \{-k_1 s^2(t) - k_2 |s(t)| + |s(t)| (\gamma - \hat{\gamma}(t)) + s(t) u_{++}(t) - h s(t) \varphi_v(t) \theta + h s(t) \varphi_v(t) \hat{\theta}(t) + \frac{1}{\Lambda} \tilde{\gamma}(t)|s(t)| + \frac{1}{\Lambda} \tilde{\eta}(t)h \|\varphi_v^T(t)\| |s(t)|\} \quad (30)$$

چنانچه به (۳۰) دو نامساوی $\{h s(t) \|\varphi_v^T(t)\| \|\theta\| \leq h \eta |s(t)| \|\varphi_v^T(t)\|\}$ و $\{-h s(t) \varphi_v(t) \theta \leq h |s(t)| \|\varphi_v^T(t)\| \|\hat{\theta}(t)\|\}$ نامساوی (۳۱) بدست می‌آید.

$$\dot{V}_3(t) \leq \{-k_1 s^2(t) - k_2 |s(t)| + |s(t)| (\gamma - \hat{\gamma}(t)) + s(t) u_{++}(t) + h \eta |s(t)| \|\varphi_v^T(t)\| + h |s(t)| \|\varphi_v^T(t)\| \|\hat{\theta}(t)\| + \frac{1}{\Lambda} \tilde{\gamma}(t)|s(t)| + \frac{1}{\Lambda} \tilde{\eta}(t)h \|\varphi_v^T(t)\| |s(t)|\} \quad (31)$$

با استناد به دو نامساوی $\{\eta < \bar{\eta}\}$ ، $\{\gamma < \bar{\gamma}\}$ و جایگذاری $u_{++}(t)$ در (۳۱)، به نامساوی (۳۲) خواهیم رسید.

$$\dot{V}_3(t) \leq \{-k_1 s^2(t) - k_2 |s(t)| + |s(t)| (\bar{\gamma} - \hat{\gamma}(t)) + h |s(t)| \|\varphi_v^T(t)\| (\bar{\eta} - \hat{\eta}(t)) + \frac{1}{\Lambda} \tilde{\gamma}(t)|s(t)| + \frac{1}{\Lambda} \tilde{\eta}(t)h \|\varphi_v^T(t)\| |s(t)|\} \quad (32)$$

با توجه به دو تعریف $\{\tilde{\gamma}(t) \triangleq \hat{\gamma}(t) - \bar{\gamma}\}$ و $\{\tilde{\eta}(t) \triangleq \hat{\eta}(t) - \bar{\eta}\}$ ، نامساوی (۳۲) به (۳۳) تبدیل می‌شود.

$$\dot{V}_3(t) \leq -k_2 |s(t)| + \left(\frac{1}{\Lambda} - 1\right) |s(t)| \tilde{\gamma}(t) + \left(\frac{1}{\Lambda} - 1\right) h \|\varphi_v^T(t)\| |s(t)| \tilde{\eta}(t) \quad (33)$$

از آنجایی که دو تابع اسکالری $\tilde{\gamma}(t)$ و $\tilde{\eta}(t)$ همواره منفی هستند، آنگاه می‌توان دو تساوی $\{\tilde{\gamma}(t) = -|\tilde{\gamma}(t)|\}$ و $\{\tilde{\eta}(t) = -|\tilde{\eta}(t)|\}$ را به نامساوی (۳۳) اعمال کرد و (۳۴) را به دست آورد.

$$\dot{V}_3(t) \leq -k_2 |s(t)| - \left(\frac{1}{\Lambda} - 1\right) |s(t)| |\tilde{\gamma}(t)| - \left(\frac{1}{\Lambda} - 1\right) h \|\varphi_v^T(t)\| |s(t)| |\tilde{\eta}(t)| \quad (34)$$

با استناد به این که Λ ضریب ثابتی دلخواه در $\{0 < \Lambda < 1\}$ است، هر سه عبارت سمت راست نامساوی (۳۴) منفی هستند. با تعریف دو نماد H_1 و H_2 به صورت $\{H_1 \triangleq \left(\frac{1}{\Lambda} - 1\right) |s(t)|\}$ و $\{H_2 \triangleq \left(\frac{1}{\Lambda} - 1\right) h \|\varphi_v^T(t)\| |s(t)|\}$ ، نامساوی ساده شده‌ی $\{\dot{V}_3(t) \leq -k_2 |s(t)| - H_1 |\tilde{\gamma}(t)| - H_2 |\tilde{\eta}(t)|\}$ از (۳۴) استخراج می‌گردد. با تعریف $\{\xi \triangleq \min(k_2, H_1, H_2)\}$ و لحاظ کردن $\{c_1 \triangleq \frac{|s(t)|}{\sqrt{2}}\}$ ، نامساوی $\{-\xi |s(t)| \leq -\xi \sqrt{\Lambda} |s(t)|\}$ حاصل می‌شود. با انتخاب $\{c_1 \triangleq \frac{|s(t)|}{\sqrt{2}}\}$ ، نامساوی $\{\dot{V}_3(t) \leq -\xi \sqrt{2\Lambda} \left(\frac{|s(t)|}{\sqrt{2}} + \frac{|\tilde{\gamma}(t)|}{\sqrt{2\Lambda}} + \frac{|\tilde{\eta}(t)|}{\sqrt{2\Lambda}}\right)\}$ حاصل می‌شود. با انتخاب $\{c_1 \triangleq \frac{|s(t)|}{\sqrt{2}}\}$ ، نامساوی $\{-|c_1| + |c_2| + |c_3| \leq -\sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}\}$ پرکاربرد نامساوی $\{c_3 \triangleq \frac{|\tilde{\eta}(t)|}{\sqrt{2\Lambda}}\}$ ، $\{c_2 \triangleq \frac{|\tilde{\gamma}(t)|}{\sqrt{2\Lambda}}\}$ و با به کارگیری نامساوی پرکاربرد $\{-|c_1| + |c_2| + |c_3| \leq -\sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}\}$ ، نامساوی

به دست می‌آید. با ارجاع به تعریف تابع کاندیدای لیاپانوف $V_3(t)$ ، نامساوی $\left\{ \dot{V}_3(t) \leq -\xi\sqrt{2\Lambda} \sqrt{\left(\frac{|s(t)|}{2} + \frac{|\tilde{y}(t)|}{2\Lambda} + \frac{|\tilde{\eta}(t)|}{2\Lambda} \right)} \right\}$ اخیر به فرم آشنا و مطلوب $\left\{ \dot{V}_3(t) \leq -\xi\sqrt{2\Lambda}\sqrt{V_3(t)} \right\}$ تبدیل می‌شود. با انتخاب $\{\rho_1 = \xi\sqrt{2\Lambda}\}$ ، $\{\rho_2 = 0.5\}$ و استناد به لم ۱ به طور صریح می‌توان نتیجه گرفت که $V_3(t)$ و $s(t)$ پس از گذشت مدت زمان متناهی T_{reaching}^* به صفر می‌رسند و برای لحظات $\{t \geq T_{\text{reaching}}^*\}$ همواره صفر خواهند ماند. با ارجاع به لم ۱ و انجام استدلال قیاسی، همان نامساوی (۲۲) برای تعیین کران بالای T_{reaching}^* استخراج می‌گردد. بنابراین سیستم حلقه‌بسته‌ی سوزن-بافت برای زمان‌های $\{t \geq T_{\text{reaching}}^*\}$ به طور دقیق به دینامیک مد لغزشی $\{s(t) = \dot{s}(t) = 0\}$ تبدیل خواهد شد. با در نظرگرفتن تعریف خمینه‌ی لغزشی $s(t)$ ، دینامیک مد لغزشی $\{s(t) = \dot{s}(t) = 0\}$ برای زمان‌های $\{t \geq T_{\text{reaching}}^*\}$ به صورت (۳۵) حاصل می‌شود که یک سیستم غیرخطی مرتبه‌ی دوم می‌باشد.

$$\begin{cases} \dot{e}_1(t) = e_2(t) \\ \dot{e}_2 = -l_1 \text{sign}(e_1(t)) - l_2 \text{sign}(e_2(t)) \end{cases} \quad (35)$$

در مرحله‌ی چهارم اثبات باید نشان داد که سیستم دینامیکی مد لغزشی (۳۵) دارای پایداری زمان-متناهی کلی است. بعد از انجام مرحله‌ی چهارم می‌توان نتیجه گرفت خطاهای ردیابی $e_1(t)$ و $e_2(t)$ که برای $\{t \geq T_{\text{reaching}}^*\}$ بر روی سیستم (۳۵) قرار گرفته‌اند و از معادلات دیفرانسیلی آن تبعیت می‌کنند، پس از سپری شدن زمان متناهی دیگری هم چون T_{settling}^* دقیقاً به صفر می‌رسند و برای لحظات $\{t \geq (T_{\text{reaching}}^* + T_{\text{settling}}^*)\}$ همواره صفر خواهند ماند. برای انجام مرحله‌ی چهارم اثبات کافی است که سیستم دینامیک مد لغزشی (۳۵) با سیستم غیرخطی موجود در لم ۲ مقایسه گردد. این مقایسه‌ی مذکور به طور صریح نشان می‌دهد که سیستم دینامیک مد لغزشی (۳۵) دارای پایداری زمان-متناهی کلی بوده و زمان متناهی T_{settling}^* را می‌توان با استفاده از نامساوی (۲۳) مشخص نمود. در انتها با استناد به مراحل چهارگانه‌ی اثبات (که به طور مفصل و مبسوط به آن‌ها پرداخته شد)، می‌توان ادعا کرد که هدف هدایت سوزن جراحی در بافت پروستات (فرمول‌بندی شده در (۱۶) و (۱۸)) پس از گذشت مدت زمان متناهی $\{T^* \leq (T_{\text{reaching}}^* + T_{\text{settling}}^*)\}$ تحقق می‌یابد. سرانجام، اثبات قضیه‌ی ۱ در اینجا به پایان می‌رسد. ■

۲-۵- دوّمین ساختار کنترلی پیشنهادی برای سیستم سوزن-بافت

خمینه‌ی لغزشی مرتبط با ساختار کنترلی پیشنهادی دوّم مطابق با (۳۶) تعریف می‌گردد که ε_1 ، ε_2 ، σ_1 و σ_2 ضرایب ثابت اختیاری می‌باشند. دو ضریب عددی ε_1 و ε_2 باید چنان انتخاب شوند که چندجمله‌ای درجه دوّم $\{z^2 + \varepsilon_2 z + \varepsilon_1 = 0\}$ هر ویتز باشد. علاوه بر این، ضریب توانی σ_2 عددی ثابت و اختیاری در بازه‌ی $\{0 < \sigma_2 < 1\}$ بوده و ضریب توانی σ_1 بایستی با استفاده از تساوی $\{\sigma_1 = \sigma_2(2 - \sigma_2)^{-1}\}$ تعیین و انتخاب گردد.

$$\begin{cases} s(t) = e_2(t) + \int_0^t \varepsilon_1 \text{sig}^{\sigma_1}(e_1(\tau)) d\tau + \int_0^t \varepsilon_2 \text{sig}^{\sigma_2}(e_2(\tau)) d\tau \\ \text{where } \text{sig}^{\sigma_i}(e_i(t)) \triangleq \text{sign}(e_i(t)) |e_i(t)|^{\sigma_i} \text{ for } i = 1, 2 \end{cases} \quad (36)$$

برای ساختار کنترلی دوّم، ورودی پیشنهادی $u(t)$ به صورت (۳۷) می‌باشد که u_+ قبلاً در (۲۰) معرفی گردیده است.

$$u(t) = h^{-1}(\ddot{x}_{d1}(t) - \varepsilon_1 \text{sig}^{\sigma_1}(e_1(t)) - \varepsilon_2 \text{sig}^{\sigma_2}(e_2(t)) + u_+) \quad (37)$$

قضیه ۲. سیستم دینامیکی سوزن-بافت (۱۵) را با ساختار کنترلی پیشنهادی دوّم (یعنی روابط (۳۶) و (۳۷)) در نظر بگیرید. آنگاه سیستم حلقه‌بسته‌ی سوزن-بافت پایدار زمان-متناهی کلی بوده و دو خطای ردیابی $e_1(t)$ و $e_2(t)$ برای لحظات $\{t \geq (T^* \leq (T_{\text{settling}}^* + T_{\text{reaching}}^*))\}$ همواره صفر خواهند شد. علاوه بر این، زمان متناهی T_{reaching}^* توسط همان نامساوی (۲۲)

و زمان متناهی T_{settling}^* بر اساس نامساوی (۳۸) تعیین می گردند. دو ماتریس $\{P \in \mathbb{R}^{2 \times 2}\}$ و $\{Q \in \mathbb{R}^{2 \times 2}\}$ دقیقاً با همان توضیحاتی که در لم ۳ آورده شده انتخاب می شوند. علاوه بر این، $\lambda_{\max}(P)$ و $\lambda_{\min}(Q)$ به ترتیب بزرگترین و کوچکترین مقادیر ویژه‌ی این دو ماتریس هستند. □

$$\begin{cases} T_{\text{settling}}^* \leq \left(\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(Q)} \right) \left(\frac{\Phi^{\varpi}(\zeta(t=T_{\text{reaching}}^*))}{\varpi} \right) \text{ with } \varpi = \frac{1-\sigma_2}{\sigma_2} \\ \Phi(\zeta(t)) = \zeta(t)^T P \zeta(t) \quad \text{where } \zeta(t) = [e_1^{\sigma_1}(t), e_2^{\sigma_2}(t)]^T \end{cases} \quad (38)$$

اثبات ۲. فرآیند این اثبات مشابه با قبل، شامل چهار مرحله بوده که سه مرحله‌ی ابتدایی آن کاملاً با مراحل آغازین اثبات ۱ یکسان هستند. بنابراین برای جلوگیری از تکرار، از آوردن آن‌ها خودداری می‌شود. بر اساس سه مرحله‌ی اولیه‌ی اثبات، با اعمال ورودی کنترلی (۳۷) به (۱۵)، سیستم حلقه‌بسته‌ی سوزن-بافت برای $\{t \geq T_{\text{reaching}}^*\}$ به دینامیک مد لغزشی $\{s(t) = \dot{s}(t) = 0\}$ می‌رسد که زمان متناهی T_{reaching}^* می‌تواند با نامساوی (۲۲) تعیین گردد. در رابطه‌ی (۳۹)، دینامیک مد لغزشی مذکور، معرفی شده که سیستمی غیرخطی و مرتبه‌ی دوّم است. برای مرحله‌ی چهارم اثبات، پایداری زمان-متناهی کلی دینامیک مد لغزشی (۳۹) مورد بررسی قرار می‌گیرد. چنانچه (۳۹) با سیستم غیرخطی موجود در لم ۳ مقایسه گردد، به طور صریح می‌توان نتیجه گرفت که دینامیک مد لغزشی $\{s(t) = \dot{s}(t) = 0\}$ دارای پایداری زمان-متناهی کلی است.

$$\begin{cases} \dot{e}_1(t) = e_2(t) \\ \dot{e}_2(t) = -\varepsilon_1 \text{sig}^{\sigma_1}(e_1(t)) - \varepsilon_2 \text{sig}^{\sigma_2}(e_2(t)) \end{cases} \quad (39)$$

بنابراین دو خطای ردیابی $e_1(t)$ و $e_2(t)$ که برای $\{t \geq T_{\text{reaching}}^*\}$ بر روی دینامیک مد لغزشی قرار گرفته‌اند، پس از گذشت زمان متناهی دیگر T_{settling}^* (توصیف شده با (۳۸)) به صفر واقعی می‌رسند و از این به بعد همواره صفر باقی خواهند ماند. با کنار هم قرار گرفتن تمامی مراحل اثبات، این نکته مستقیماً استنتاج می‌شود که برای تمامی لحظات $\{t \geq (T^* \leq (T_{\text{settling}}^* + T_{\text{reaching}}^*))\}$ هدف هدایت زمان-متناهی سوزن جراحی رباتیک در بافت پروستات (توصیف شده با (۱۶) و (۱۸)) برآورده می‌شود. در نهایت، اثبات قضیه ۲ در اینجا به اتمام می‌رسد. ■

۳-۵- سومین ساختار کنترلی پیشنهادی برای سیستم سوزن-بافت

برای سومین ساختار کنترلی سیستم سوزن-بافت، خمینه‌ی لغزشی $s(t)$ به صورت (۴۰) ارائه می‌شود که ϱ ثابتی اختیاری در بازه‌ی $\{0 < \varrho < 1\}$ می‌باشد. در این ساختار، ورودی کنترلی $u(t)$ مطابق با رابطه‌ی (۴۱) معرفی می‌شود که دقیقاً همان عبارت موجود در (۲۰) است.

$$\begin{cases} s(t) = \int_0^t \text{sig}^{\varrho}(e_2(\tau)) d\tau + \int_0^t \text{sig}^{\varrho(2-\varrho)-1}(\ell(e_1, e_2)) d\tau \\ \text{sig}^{\varrho}(e_2(t)) \triangleq |e_2(t)|^{\varrho} \text{sign}(e_2(t)) \\ \text{sig}^{\varrho(2-\varrho)-1}(\ell(e_1, e_2)) \triangleq |\ell(e_1, e_2)|^{\varrho(2-\varrho)-1} \text{sign}(\ell(e_1, e_2)) \\ \ell(e_1, e_2) \triangleq e_1(t) + (2-\varrho)^{-1} |e_2(t)|^{2-\varrho} \text{sign}(e_2(t)) \end{cases} \quad (40)$$

و

$$u(t) = h^{-1}(\dot{x}_{d1}(t) - \text{sig}^{\varrho}(e_2(t)) - \text{sig}^{\varrho(2-\varrho)-1}(\ell(e_1, e_2)) + u_+) \quad (41)$$

قضیه ۳. ساختار کنترلی پیشنهادی سوم (معرفی شده با روابط (۴۰) و (۴۱)) را در نظر بگیرید. چنانچه این ساختار کنترلی به سیستم دینامیکی سوزن-بافت (۱۵) اعمال گردد، آنگاه اولاً پایداری زمان-متناهی کلی سیستم حلقه‌بسته تضمین شده و ثانیاً هدف هدایت

زمان-متناهی سوزن جراحی در بافت پروستات برای لحظات $\{t \geq (T^* \leq (T_{\text{settling}}^* + T_{\text{reaching}}^*))\}$ برآورده می‌گردد. هم‌چنین کران‌های بالا برای دو زمان متناهی T_{reaching}^* و T_{settling}^* به ترتیب توسط نامساوی‌های (۲۲) و (۴۲) مشخص می‌گردند.

$$\begin{cases} T_{\text{settling}}^* \leq (\Upsilon(1 - \rho))^{-1} (3 - \rho) \left(\Omega(e_1(t = T_{\text{reaching}}^*), e_2(t = T_{\text{reaching}}^*)) \right)^{\frac{1-\rho}{3-\rho}} \\ \Omega(e_1, e_2) \triangleq \frac{2-\rho}{3-\rho} |\ell(e_1, e_2)|^{\frac{3-\rho}{2-\rho}} + \kappa_1 e_2(t) \ell(e_1, e_2) + \frac{\kappa_2}{3-\rho} |e_2(t)|^{3-\rho} \\ \Upsilon \triangleq - \max_{(e_1, e_2) \in \mathcal{E}} \dot{\Omega}(e_1, e_2) \text{ with } \mathcal{E} \triangleq \{(e_1, e_2) : \Omega(e_1, e_2) = 1\} \end{cases} \quad (42)$$

در نامساوی (۴۲)، κ_1 و κ_2 دو ضریب عددی ثابت با شرایط $\{0 < \kappa_1 < 1\}$ و $\{\kappa_2 > 1\}$ هستند □.

اثبات ۳. مشابه با اثبات قبلی، این اثبات نیز شامل چهار مرحله‌ی متوالی است. چنانچه سه مرحله‌ی اولیه‌ی این اثبات را مشابه با مراحل آغازین اثبات‌های قبلی جلو ببریم، از نظر ریاضی نشان داده می‌شود که اعمال ورودی کنترلی (۴۱) به (۱۵)، می‌تواند سیستم حلقه‌بسته‌ی سوزن-بافت را برای تمام لحظات $\{t \geq T_{\text{reaching}}^*\}$ به دینامیک مد لغزشی $\{s(t) = \dot{s}(t) = 0\}$ مبدل سازد. این زمان متناهی رسیدن T_{reaching}^* نیز با نامساوی (۲۲) قابل تعیین است. علاوه بر این، دینامیک مد لغزشی $\{s(t) = \dot{s}(t) = 0\}$ به صورت سیستم غیرخطی مرتبه‌ی دوم (۴۳) حاصل می‌گردد. به عنوان مرحله‌ی چهارم اثبات، چنانچه سیستم غیرخطی مرتبه‌ی دوم موجود در لم ۴ با دینامیک مد لغزشی (۴۳) قیاس شود، پایداری زمان-متناهی کلی نقطه‌ی تعادل (۴۳) صریحاً نتیجه می‌گردد. فلذا دو خطای $e_1(t)$ و $e_2(t)$ که برای $\{t \geq T_{\text{reaching}}^*\}$ از معادلات دینامیکی (۴۳) پیروی می‌کنند، پس از گذشت زمان متناهی T_{settling}^* به صفر واقعی همگرا می‌شوند و همواره صفر باقی می‌مانند. با استفاده‌ی مستقیم از نامساوی لم ۴، می‌توان نتیجه گرفت که کران بالای زمان متناهی T_{settling}^* با (۴۲) تعیین می‌شود.

$$\begin{cases} \dot{e}_1(t) = e_2(t) \\ \dot{e}_2(t) = -\text{sig}^\rho(e_2(t)) - \text{sig}^{\rho(2-\rho)^{-1}}(\ell(e_1, e_2)) \end{cases} \quad (43)$$

با جمع‌بندی مراحل چهارگانه‌ی اثبات، می‌توان متوجه شد که بعد از سپری شدن زمان متناهی $(T^* \leq (T_{\text{settling}}^* + T_{\text{reaching}}^*))$ ، هدف هدایت زمان-متناهی سیستم سوزن-بافت (معرفی‌گردیده با (۱۶) و (۱۸)) برآورده می‌شود. در انتها، اثبات قضیه ۳ در اینجا پایان می‌پذیرد ■.

یادآوری ۲. در سه ساختار کنترلی پیشنهادی، تعدادی ثابت اختیاری به صورت ضرایب عددی یا توانی وجود دارند که مقادیر این ثابت‌های اختیاری تاثیر بسزایی بر روی کیفیت پاسخ گذرای سیستم سوزن-بافت و میزان تلاش کنترلی اعمالی به سیستم دارند و باید به طور مناسب انتخاب گردند. فهرستی از ثابت‌های اختیاری موجود در ساختارهای کنترلی پیشنهادی (همراه با شرایط لازم برای آن‌ها)، به صورت جمع‌بندی شده در جدول ۱ ارائه می‌شود. بنابراین می‌توان تابع هزینه‌ای (Cost function) متشکل از دو عبارت همیشه مثبت (به صورت قدرمطلق یا فرم مربعی) تعریف کرد که یکی از این عبارات شاخصی برای سرعت پاسخ گذرا و دیگری شاخصی برای تلاش کنترلی باشد. هر دو شاخص مثبت فوق‌الذکر توابعی غیرخطی از ثابت‌های اختیاری ساختار کنترلی هستند. بنابراین با حل یک مسئله‌ی بهینه‌سازی غیرخطی دارای قیود (همان نامساوی‌های لازم و ضروری بر روی ثابت‌ها)، می‌توان مجموعه جواب مناسبی برای ثابت‌های اختیاری پیدا کرد که تابع هزینه‌ی تعریف شده، کمینه گردد.

یادآوری ۳. بررسی نامساوی‌های استخراجی مرتبط با زمان‌های متناهی T_{reaching}^* و T_{settling}^* نشان می‌دهند که این زمان‌ها وابستگی غیرخطی شدیدی به شرایط اولیه‌ی سیستم حلقه‌بسته و مقادیر ثابت‌های اختیاری موجود در خمینه‌ی لغزشی و ورودی کنترلی دارند.

چنانچه ساختارهای کنترلی پیشنهادی این مقاله بر اساس لم‌های ۲ و ۳ موجود در مرجع [۳۰] تعمیم و توسعه داده شوند، وابستگی زمان‌های متناهی T^* reaching و T^* settling به شرایط اولیه‌ی سیستم تا حد قابل ملاحظه‌ای کاهش می‌یابد.

جدول ۱. فهرست ثابت‌های اختیاری موجود در سه ساختار کنترلی پیشنهادی به همراه شرایط لازم برای آن‌ها

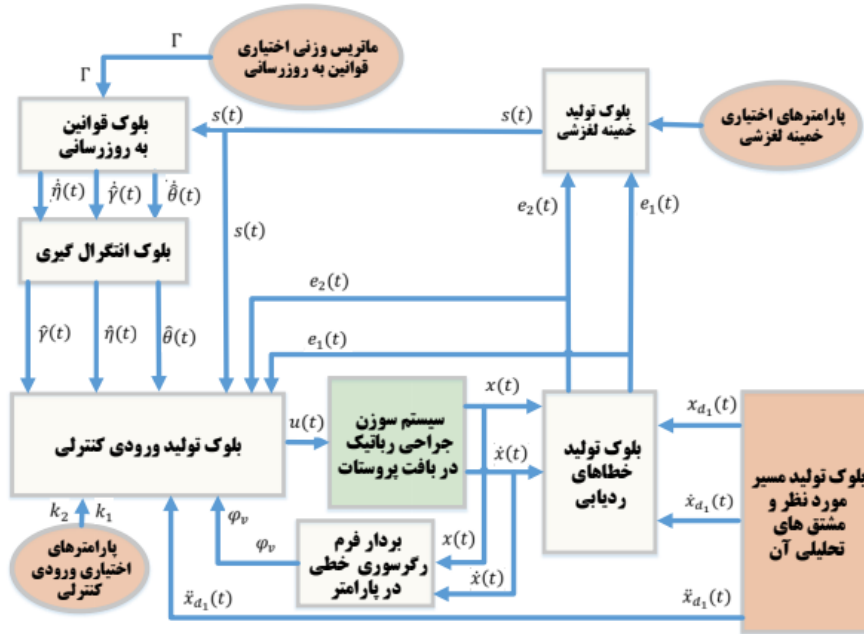
ساختار کنترلی	ثابت‌های خمینه لغزشی	ثابت‌های ورودی کنترلی
نوع اول	$l_1 > l_2 > 0$	$k_1 > 0, k_2 > 0$ and $\Gamma \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ is an positive definite matrix
نوع دوم	$\sigma_1 = \frac{\sigma_2}{2 - \sigma_2}$ and $0 < \sigma_2 < 1$ $\varepsilon_1 > 0$ and $\varepsilon_2 > 0$	$k_1 > 0, k_2 > 0$ and $\Gamma \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ is an positive definite matrix
نوع سوم	$0 < \rho < 1$	$k_1 > 0, k_2 > 0$ and $\Gamma \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ is an positive definite matrix

برای درک بهتری از نحوه‌ی عملکرد سیستم حلقه‌بسته‌ی سوزن-بافت، تصویری مفهومی (فلوچارتی) در شکل ۳ ارائه گردیده که برای هر سه ساختار کنترلی پیشنهادی صادق است.

یادآوری ۴. همان‌طوری که از شکل ۳ مشخص است، هر سه راهکار کنترلی ارائه شده، از دیدگاه ساختاری و هم‌چنین بعد پیاده‌سازی یکسان بوده و هر سه قادرند که هدف هدایت زمان-متناهی را برای سیستم حلقه‌بسته‌ی سوزن جراحی فراهم سازند. تفاوت اساسی میان این سه راهکار کنترلی در نحوه‌ی تعریف خمینه‌ی لغزشی آن‌ها و ثابت‌های اختیاری موجود در این خمینه‌ها می‌باشد. تفاوت در تعریف خمینه‌های لغزشی باعث شده است که سه راهکار کنترلی پیشنهادی، زمان‌های متناهی متفاوتی برای همگرایی خطاهای ردیابی فراهم سازند.

۶- نتایج شبیه‌سازی

در این بخش از مقاله، هر سه ساختار کنترلی غیرخطی مقاوم-تطبیقی پیشنهادی، بر روی سیستم دینامیکی سوزن-بافت مرتبه‌ی دوم مورد شبیه‌سازی قرار می‌گیرند. تمام شبیه‌سازی‌ها در محیط Simulink نرم‌افزار MATLAB انجام پذیرفته است. بردار رگرسیون خطی در پارامتر $\{\varphi_v(x, \dot{x}) \in \mathbb{R}^{1 \times 2}\}$ را کاملاً یکسان و مطابق با شبیه‌سازی‌های مراجع [۱۹] و [۲۱] انتخاب کرده‌ایم. مقدار جرم سوزن $\{M = 0.1(kg)\}$ منظور گردیده و برای ساخت مدل دینامیکی سوزن-بافت در محیط Simulink، بردار ثابت‌های فیزیکی نامعلوم $\theta = [\lambda \ \mu]^T$ به صورت $\theta = [64.5 \ 33.5]^T$ انتخاب شده است. باید توجه داشت که بردار $\theta = [\lambda \ \mu]^T$ در بحث ساختار کنترلی، نامعلوم در نظر گرفته شده و از تخمین این بردار برای ایجاد ورودی کنترلی استفاده می‌شود. در قانون به‌روزرسانی مرتبط با $\hat{\theta}(t)$ (که تخمین بردار θ است)، ماتریس وزنی اختیاری $\Gamma \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ به صورت $\{\Gamma = 0.1 \mathbf{I}_{2 \times 2}\}$ انتخاب شده که $\mathbf{I}_{2 \times 2}$ معرف ماتریس همانی است. ثابت‌های موجود در راهکارهای کنترلی اول، دوم و سوم به ترتیب $\{l_1 = 8, l_2 = 5, k_1 = k_2 = 10\}$ ، $\{\varepsilon_1 = 8, \varepsilon_2 = 5, \sigma_1 = 0.33, \sigma_2 = 0.5, k_1 = k_2 = 10\}$ و $\{\rho = 0.1, k_1 = k_2 = 10\}$ مقداردهی شده‌اند. شرایط اولیه برای



شکل ۳. تصویری مفهومی از نحوه‌ی ارتباط اجزای هر کدام از ساختارهای کنترلی غیرخطی پیشنهادی برای سیستم سوزن جراحی در بافت پروستات

متغیرهای حالت سیستم سوزن-بافت و برای مقادیر تخمینی $\hat{\eta}(t), \hat{\gamma}(t), \hat{\theta}(t)$ به فرم $\{x(0) = 0.5, \dot{x}(0) = 0.25\}$ و $\{\hat{\theta}(0) = [0.2 \ 0.3]^T, \hat{\gamma}(0) = 0.1, \hat{\eta}(0) = 0.015\}$ در نظر گرفته شده‌اند. مسیرهای مورد نظر برای متغیرهای حالت $x_1(t)$ و $x_2(t)$ به ترتیب $\{x_{d1}(t) = 2 + \sin(t)\}$ و $\{x_{d2}(t) = \dot{x}_{d1}(t) = \cos(t)\}$ تعیین شده‌اند. در تمامی شبیه‌سازی‌ها، عدم قطعیت $\{x_{d2}(t) = \dot{x}_{d1}(t) = \cos(t)\}$ به مدل دینامیکی سیستم سوزن-بافت اضافه گردیده است. نتایج حاصل از شبیه‌سازی‌های این مقاله در شکل‌های (۴)، (۵) و (۶) نمایش داده شده‌اند. تمرکز و دقت بر روی این شکل‌ها آشکار می‌سازد که هر سه ساختار پیشنهادی قادرند تا هدف هدایت زمان-متناهی سوزن جراحی در بافت پروستات را برآورده سازند. در شکل (۴)، پاسخ‌های زمانی متغیرهای حالت سیستم حلقه‌بسته‌ی سوزن-بافت با استفاده از هر سه نوع کنترل‌کننده‌های غیرخطی مقاوم-تطبیقی نشان داده شده‌اند. از مشاهده‌ی قسمت‌های (a) و (b) شکل (۴) می‌توان دریافت هر سه راهکار کنترلی غیرخطی ارائه شده، توانسته‌اند متغیرهای $x_1(t)$ و $x_2(t)$ را پس از گذشت مدت زمان‌های متناهی به طور دقیق به مسیرهای مورد نظر $\{x_{d1}(t) = 2 + \sin(t)\}$ و $\{x_{d2}(t) = \cos(t)\}$ برسانند. پاسخ‌های زمانی مرتبط با توابع تخمینی اسکالری $\|\hat{\theta}(t)\|, \hat{\gamma}(t)$ و $\hat{\eta}(t)$ به ترتیب در قسمت‌های (a)، (b) و (c) شکل (۵) نمایش داده شده‌اند. نتایج شبیه‌سازی‌های ارائه شده در این شکل نشان می‌دهند که هر سه روش کنترلی غیرخطی پیشنهادی توانسته‌اند توابع تخمینی $\|\hat{\theta}(t)\|, \hat{\gamma}(t)$ و $\hat{\eta}(t)$ را پس از گذشت مدت زمان‌های متناهی، دقیقاً به اعداد ثابتی برسانند که لزوماً با مقادیر اسمی نامعلوم $\|\theta\|, \gamma$ و η برابر نیستند. در شکل (۶)، پاسخ زمانی سیگنال کنترلی $u(t)$ با استفاده از سه ساختار کنترلی پیشنهادی آورده شده‌اند. با استفاده از نتایج شبیه‌سازی، زمان‌های متناهی همگرایی $\{x_1(t) \xrightarrow{T^*} x_{d1}(t)\}$ و $\{x_2(t) \xrightarrow{T^*} x_{d2}(t)\}$ به صورت جدول ۲ استخراج شده‌اند. تمرکز بر روی این جدول نشان می‌دهد که راهکار کنترلی پیشنهادی اول نسبت به دو راهکار پیشنهادی دیگر عملکرد بهتری داشته است.

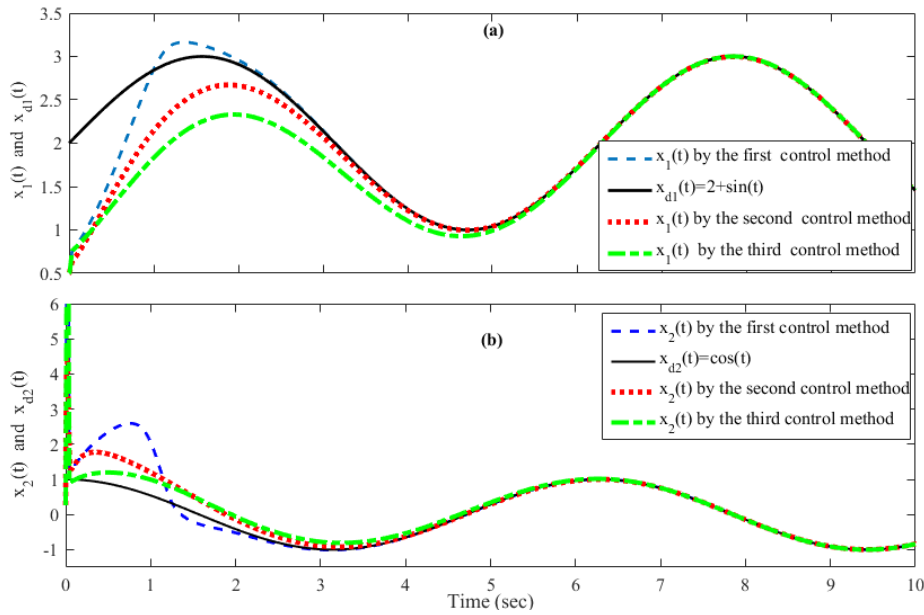
جدول ۲. مقادیر عددی حاصله در شبیه‌سازی برای زمان‌های متناهی همگرایی مرتبط با سه ساختار کنترلی پیشنهادی

ساختار کنترلی	زمان متناهی همگرایی $\{x_1(t) \xrightarrow{T^*} x_{d_1}(t)\}$	زمان متناهی همگرایی $\{x_2(t) \xrightarrow{T^*} x_{d_2}(t)\}$
نوع اول	$T^* = 2.1(\text{sec})$	$T^* = 1.9(\text{sec})$
نوع دوم	$T^* = 2.9(\text{sec})$	$T^* = 2.65(\text{sec})$
نوع سوم	$T^* = 4.7(\text{sec})$	$T^* = 3.68(\text{sec})$

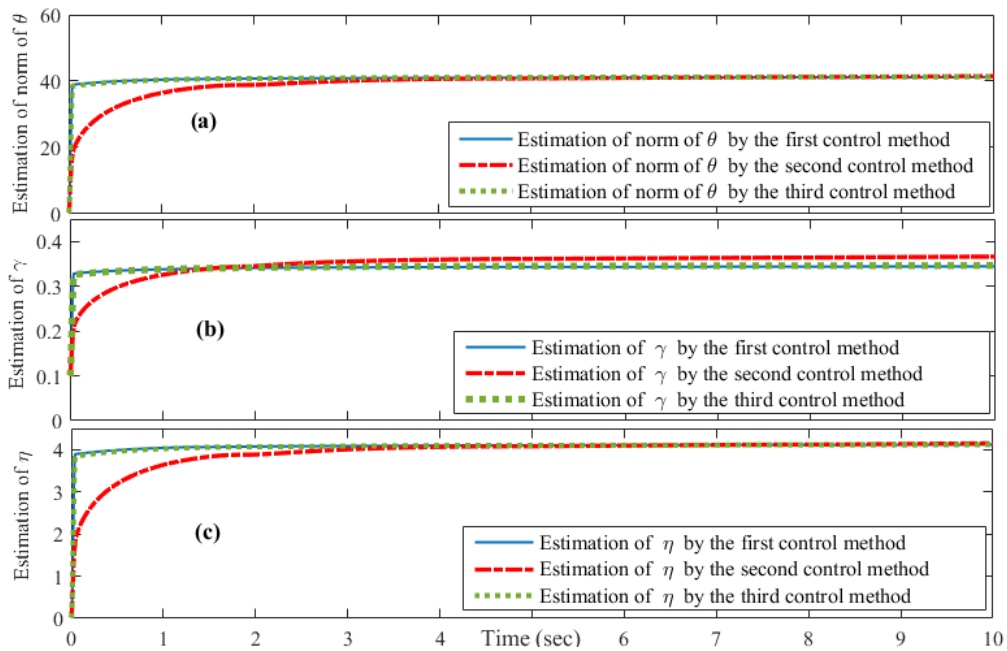
۷- نتیجه‌گیری و پیشنهادها برای پژوهش‌های آتی

در این مقاله، با تعمیم روش کنترل مد لغزشی پایاندار، تعریف ابتکاری چندین خمینه‌ی لغزشی و تلفیق آن با قوانین به‌روزرسانی زمان-متناهی، سه دسته از کنترل‌کننده‌های غیرخطی مقاوم-تطبیقی طراحی گردیدند تا سوزن جراحی رباتیک در حضور نامعینی‌های پارامتری و مدل‌سازی، به مسیر موردنظر درون بافت پروستات همگرا شوند و نوک سوزن دقیقاً پس از سپری شدن زمان متناهی قابل تنظیمی به نقطه‌ی هدف برسد. تحلیل پایداری زمان-متناهی کلی سیستم دینامیکی سوزن-بافت نشان داد که مدت زمان متناهی برای همگرا ساختن سوزن جراحی به مسیر درون بافتی از مجموع دو زمان کوچکتر تشکیل می‌شود و هر کدام از این دو زمان را می‌توان با استفاده از نامساوی‌های جداگانه‌ای مشخص کرد. تمرکز بر روی نامساوی‌های استخراج گردیده آشکار ساخت که مدت زمان متناهی فوق‌الذکر وابستگی غیرخطی شدیدی به شرایط اولیه‌ی سیستم حلقه‌بسته و مقادیر ضرایب اختیاری موجود در کنترل‌کننده‌های غیرخطی دارد. نتایج شبیه‌سازی بر روی سیستم دینامیکی مرتبه‌ی دوم سوزن-بافت نشان داد که هر سه ساختار کنترلی غیرخطی پیشنهادی می‌توانند هدف ردیابی زمان-متناهی سوزن در بافت را به خوبی برآورده سازند. در راستای موضوع تحقیقاتی مقاله‌ی حاضر، می‌توان پیشنهادهایی را برای کارهای پژوهشی آینده به شرح زیر ارائه داد: (الف) برای طراحی کنترل‌کننده‌های غیرخطی از هر دو متغیر حالت سیستم سوزن-بافت استفاده گردید. در پیاده‌سازی عملی اندازه‌گیری متغیر حالت مرتبط با سرعت سوزن سخت و پرهزینه است و بنابراین برای تخمین سرعت سوزن، بایستی رویکردی غیرخطی زمان-متناهی طراحی گردد، (ب): در این مقاله از مدل دینامیکی مرتبه‌ی دوم سیستم سوزن-بافت برای طراحی کنترل‌کننده غیرخطی استفاده شد، به عنوان موضوع تحقیقاتی پیشنهادی بعدی، می‌توان فرآیند طراحی کنترل‌کننده غیرخطی مقاوم-تطبیقی زمان-متناهی را به مدل‌های دینامیکی مرتبه بالاتر سیستم سوزن-بافتی تعمیم و توسعه داد، (پ): در مقاله‌ی حاضر، سیستم دینامیکی سوزن-بافت به صورت تحریک کامل در نظر گرفته شده، در حالی که مدل دینامیکی برخی از سیستم‌های سوزن-بافت از نوع زیرتحریک بوده و تعداد ورودی‌های کنترلی کمتر از درجه‌های آزادی است. به عنوان سومین کار تحقیقاتی آینده، می‌توان ساختار کنترلی پیشنهادی را به سیستم‌های سوزن-بافت از نوع زیرتحریک تعمیم داد، (ت) در این مقاله برای مقابله با چالش نامعینی پارامتری از رویکرد کنترل تطبیقی (استفاده از فرم رگرسوری خطی در پارامتر) و برای مواجهه با عدم قطعیت مدل‌سازی جمعی از راهکار محافظه‌کارانه‌ی کنترل مقاوم استفاده شد. یکی از پیشنهادها برای کارهای آینده، می‌تواند استفاده از شبکه‌های عصبی مصنوعی برای تخمین نامعینی‌های پارامتری و مدل‌سازی باشد، (ث) در مقاله‌ی کنونی فرض گردید که گشتاور کنترلی اعمالی به سوزن جراحی رباتیک تحت تاثیر هیچ نوع غیرخطی‌گری نبوده، اما در پیاده‌سازی واقعی به دلیل استفاده از عملگرهایی هم‌چون موتور الکتریکی همواره محدودیت‌هایی مانند اشباع یا ناحیه

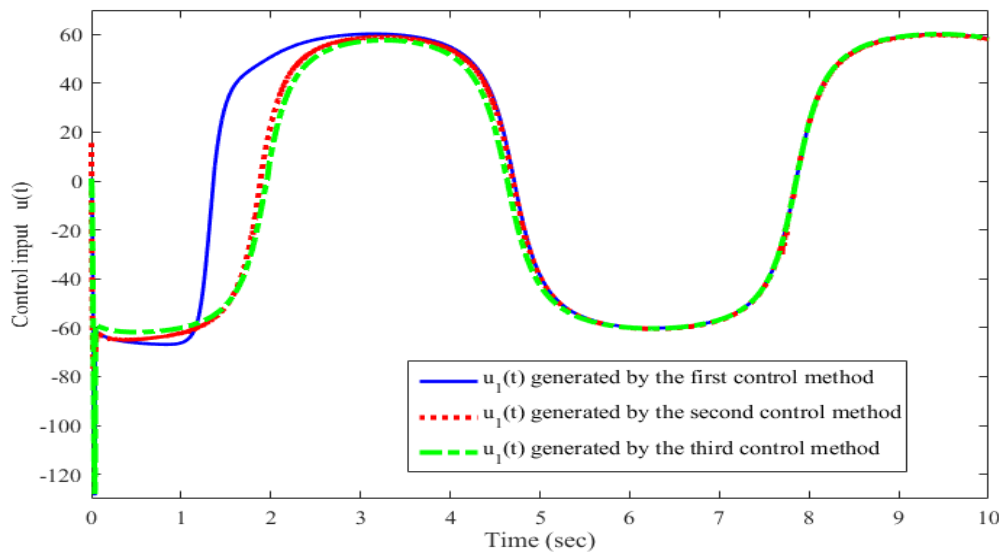
مرده وجود دارد. بنابراین به عنوان پنجمین کار پیشنهادی آینده می توان غیرخطی ساز اشباع را در مدل دینامیکی سیستم سوزن-بافت در نظر گرفته و فرآیند طراحی کنترل کننده غیرخطی را مجدداً تکرار کرد.



شکل ۴. پاسخ های زمانی متغیرهای سیستم سوزن-بافت با استفاده از هر سه نوع کنترل کننده ی غیرخطی پیشنهادی، (a): پاسخ های زمانی $x_1(t)$ و مسیر موردنظر $\{x_{d1}(t) = 2 + \sin(t)\}$ ، (b): پاسخ های زمانی $x_2(t)$ و مسیر موردنظر $\{x_{d2}(t) = \cos(t)\}$



شکل ۵. پاسخ های زمانی توابع تخمینی $\|\hat{\theta}(t)\|$ ، $\hat{\gamma}(t)$ و $\hat{\eta}(t)$ با استفاده از سه راهکار کنترلی غیرخطی پیشنهادی، (a): پاسخ های زمانی $\|\hat{\theta}(t)\|$ ، (b): پاسخ های زمانی $\hat{\gamma}(t)$ ، (c): پاسخ های زمانی $\hat{\eta}(t)$



شکل ۶. پاسخ‌های زمانی سیگنال کنترلی $u(t)$ با استفاده از سه راهکار کنترلی غیرخطی پیشنهادی

مراجع

- [1] N. Abolhassani, R. Patel, and M. Moallem, "Needle insertion into soft tissue: A survey," *Medical Engineering & Physics*, vol. 29, no. 4, pp. 413-431, 2007.
- [2] B. Xu and S. Y. Ko, "3D Feedback control using fuzzy logic for a curvature-controllable steerable bevel-tip needle," *Mechatronics*, vol. 68, no. 1, pp. 102368 (1-10), 2020.
- [3] A. Segato, M. D. Marzo, S. Zucchelli, S. Galvan, R. Secoli, and E. D. Momi, "Inverse reinforcement learning intra-operative path planning for steerable needle," *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, vol. 69, no. 6, pp. 1995-2005, 2022.
- [4] A. Nejadi Aghdam and P. X. Liu, "A novel path planner for steerable bevel-tip needles to reach multiple targets with obstacles," *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, vol. 69, no. 10, pp. 7636-7645, 2020.
- [5] M. Khadem, C. Rossa, N. Usmani, R. S. Sloboda, and M. Tavakoli, "Geometric control of 3D needle steering in soft-tissue," *Automatica*, vol. 101, no. 1, pp. 36-43, 2019.
- [6] B. Qi, Z. Yu, Z. K. Varnamkhasti, Y. Zhou, and J. Sheng, "Toward a telescopic steerable robotic needle for minimally invasive tissue biopsy," *IEEE Robotics and Automation Letters*, vol. 6, no. 2, pp. 616-627, 2021.
- [7] L. Quagliato and S. C. Ryu, "FEA modeling of soft tissue interaction for active needles with a rotational tip joint," *IEEE Access*, vol. 10, no. 1, pp. 46291-46301, 2022.
- [8] M. Pinzi, T. Watts, R. Secoli, S. Galvan, and F. R. Y. Baena, "Path replanning for orientation-constrained needle steering," *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, vol. 68, no. 5, pp. 1459-1466, 2021.
- [9] M. Motaharif, H. A. Talebi, F. Abdollahi, and A. Afshar, "Nonlinear adaptive output feedback controller design for guidance of flexible needles," *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, vol. 20, no. 4, pp. 1912-1919, 2014.
- [10] J. Carriere, M. Khadem, C. Rossa, N. Usmani, R. Sloboda, and M. Tavakoli, "Surgeon-in-the-loop 3D needle steering through ultrasound-guided feedback control," *IEEE Robotics and Automation Letters*, vol. 3, no. 1, pp. 469-476, 2018.
- [11] E. Franco, T. Brown, A. Astolfi, and F. R. Y. Baena, "Adaptive energy shaping control of robotic needle insertion," *Mechanism and Machine Theory*, vol. 155, no. 1, pp. 104060 (1-16), 2021.

- [12] S. Hans, F. Orlando, and M. Joseph, "Robust control of a bevel-tip needle for medical interventional procedures," *IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica*, vol. 7, no. 1, pp. 244-256, 2019.
- [13] M.S. Qureshi, P. Swarnkar, and S. Gupta, "A supervisory on-line tuned fuzzy logic based sliding mode control for robotics: An application to surgical robot," *Robotics and Autonomous Systems*, vol. 109, no. 1, pp. 68-85, 2018.
- [14] S. Hans, F. Orlando, and M. Joseph, "Control of a flexible bevel-tipped needle using super-twisting controller based sliding mode observer," *ISA Transactions*, vol. 69, no. 109, pp. 186-198, 2021.
- [15] N. Akbari, S. Mobayen, F. Bayat, and A. Fekih, "Finite-time control of myringotomy surgical device based on nonsingular terminal sliding disturbance observer," *IEEE Access*, vol. 9, no. 1, pp. 72412-72419, 2021.
- [16] P. Biswas, H. Dehghani, S. Sikander, and S. E. Song, "Kinematic and mechanical modelling of a novel 4-DOF robotic needle guide for MRI-guided prostate intervention," *Biomedical Engineering Advances*, vol. 4, no. 1, pp. 100036 (1-11), 2022.
- [17] B. Fallahi, C. Rossa, R. Slobda, N. Usmani, and M. Tavakoli, "Sliding-based image-guided 3D needle steering in soft tissue," *Control Engineering Practice*, vol. 63, no. 1, pp. 34-43, 2017.
- [18] P. Kulkarni, S. Sikander, P. Biswas, S. Frawley, and S. E. Song, "Review of robotic needle guide systems for percutaneous intervention," *Annals of Biomedical Engineering*, vol. 47, no. 1, pp. 2489-2513, 2019.
- [19] A. Maghsoudi and M. Jahed, "Model-based needle control in prostate percutaneous procedures," *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part H: Journal of Engineering in Medicine*, vol. 227, no. 1, pp. 58-71, 2013.
- [20] E. Franco and A. Donaire, "Energy shaping nonlinear control of under-actuated needle insertion," *Control Engineering Practice*, vol. 128, no. 1, pp. 105326 (1-12), 2022.
- [21] A. Maghsoudi and M. Jahed, "Needle dynamics modelling and control in prostate brachytherapy," *ISA Transactions*, vol. 6, no. 11, pp. 1671-1681, 2012.
- [22] F. Sedghi, M. M. Arefi, A. Abooe, and S. Yin, "Distributed adaptive-neural finite-time consensus control for stochastic nonlinear multi-agent systems subject to saturated inputs," *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, DOI: 10.1109/TNNLS.2022.3145975, 2022.
- [۲۳] عباس کریمی‌نیا و حسن زرآبادی‌پور، "طراحی کنترل مد لغزشی مرتبه کسری مبتنی بر قانون تطبیق غیرخطی برای پایدارسازی و همزمان‌سازی کلاسی از سیستم آشوبناک مرتبه کسری" *مجله علمی و پژوهشی سامانه‌های غیرخطی در مهندسی برق*، جلد ۸، شماره ۲، صفحات ۳۸-۶۲، ۱۴۰۱.
- [۲۴] جواد مولائی، اکبر شرقی و رضا آقایی طوق، "طراحی کنترل مد لغزشی ترمینال زمان-ثابت برای ربات با چرخ‌های مکانوم" *مجله علمی و پژوهشی سامانه‌های غیرخطی در مهندسی برق*، جلد ۸، شماره ۲، صفحات ۱۹-۳۷، ۱۴۰۱.
- [25] A. Abooe, M. Hayeri Mehrizi, M. M. Arefi, and S. Yin, "Finite-time sliding mode control for a 3-DOF fully actuated autonomous surface vehicle," *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, vol. 43, no. 2, pp. 371-389, 2021.
- [26] T. Yu, H. Wang, J. Cao, and C.F. Xue, "Finite-time stabilization of memristive neural networks via two-phase method," *Neurocomputing*, vol. 491, no. 1, pp. 24-33, 2022.
- [27] F. Sedghi, M. M. Arefi, A. Abooe, and O. Kaynak, "Adaptive robust finite-time nonlinear control of a typical autonomous underwater vehicle with saturated inputs and uncertainties," *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, vol. 26, no. 5, pp. 2517-2527, 2021.
- [28] J. Yang, X. Yu, L. Zhang, and S. Li, "A Lyapunov-based approach for recursive continuous higher order non-singular terminal sliding-mode control," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 66, no. 9, pp. 4424-4431, 2021.

[۲۹] علی ابویی "ارائه‌ی ساختار کنترلی تلفیقی نوآورانه برای وسیله‌ی دریایی خودکار تحریک کامل" *مجله علمی و پژوهشی سامانه‌های*

غیرخطی در مهندسی برق، پذیرش شده برای چاپ، ۱۴۰۱.

- [۳۰] علی ابوبئی، مهران اسلامی و محمد حائری، "طراحی کنترل کننده‌های غیرخطی زمان-محدود مقاوم برای زیردریایی شش درجه آزادی به منظور ردیابی مسیر" *مجله علمی و پژوهشی کنترل*، جلد ۱۴، شماره ۱، صفحات ۹۳-۱۱۳، ۱۳۹۹.
- [31] A. Abooe and M. M. Arefi, "Robust finite-time stabilizers for a connected chain of nonlinear double-integrator systems," *IEEE Systems Journal*, vol. 13, no. 1, pp. 833-841, 2019.
- [32] H. Fakharizade Bafghi, M.R. Jahed-Motlagh, A. Abooe, and A. Moarefianpur, "Robust finite-time tracking for a square fully-actuated class of nonlinear systems," *Nonlinear Dynamics*, vol. 103, no. 21, pp. 1-15, 2021.
- [33] T. Yu, J. Cao, L. Rutkowski, and Y. P. Luo, "Finite-time synchronization of complex-valued memristive-based neural networks via hybrid control," *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, vol. 33, no. 8, pp. 3938-3947, 2022.
- [۳۴] مینا فهستانی، احمدرضا ولی و مهدی سیاهی، "طراحی کنترل کننده غیرخطی به منظور پایدارسازی زمان-محدود سیستم تعلیق الکترومغناطیسی" *مجله علمی و پژوهشی سامانه‌های غیرخطی در مهندسی برق*، جلد ۸، شماره ۲، صفحات ۹۸-۱۱۶، ۱۴۰۱.
- [35] T. Yu, J. Cao, and K. Lu, "Finite-time synchronization control of networked chaotic complex-valued systems with adaptive coupling," *IEEE Transactions on Network Science and Engineering*, vol. 9, no. 4, pp. 2510-2520, 2022.
- [36] X. Yu, Y. Feng, and Z. Man, "Terminal sliding mode control: An overview," *IEEE Open Journal of the Industrial Electronics Society*, vol. 2, no. 1, pp. 36-52, 2021.
- [37] K. Zhang, L. Wang, and X. Fang, "High-order fast nonsingular terminal sliding mode control of permanent magnet linear motor based on double disturbance observer," *IEEE Transactions on Industry Applications*, vol. 58, no. 3, pp. 3696-3705, 2022.
- [38] Y. Sun, Y. Gao, Y. Zhao, Z. Liu, J. Wang, J. Kuang, F. Yan, and J. Liu, "Neural network-based tracking control of uncertain robotic systems: Predefined-time nonsingular terminal sliding-mode approach," *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 69, no. 10, pp. 10510-10520, 2022.