

# بررسی احتمالاتی پایداری سیگنال کوچک یک سیستم قدرت با استفاده از مدلسازی مبتنی بر تقریب چند جمله ای هرمیت در شرایط عدم قطعیت بار

علی محمد تبریزی<sup>۱</sup>، محمد مهدی رضایی<sup>۲</sup>، شاهرخ شجاعیان<sup>۳</sup> و مریم شریف دوست<sup>۴</sup>

<sup>۱</sup>دانشجوی دکتری، مهندسی برق، واحد خمینی شهر، دانشگاه آزاد اسلامی، اصفهان، ایران  
alimohammad.tabrizchi@iaukhsh.ac.ir

<sup>۲</sup>نویسنده مسئول، استادیار، مهندسی برق، واحد خمینی شهر، دانشگاه آزاد اسلامی، اصفهان، ایران  
mm.rezaei@iaukhsh.ac.ir

<sup>۳</sup>استادیار، مهندسی برق، واحد خمینی شهر، دانشگاه آزاد اسلامی، اصفهان، ایران  
shojaeian@iaukhsh.ac.ir

<sup>۴</sup>استادیار، ریاضی و آمار، واحد خمینی شهر، دانشگاه آزاد اسلامی، اصفهان، ایران  
sharifdoost@iaukhsh.ac.ir

نشریه علمی غیرنظری در مهندسی برق

دوره ۷ - شماره ۱

بهار و تابستان ۱۳۹۹

صفحات ۱۳۱ الی ۱۴۸

ISSN: 2322-3146

http://jnsee.sut.ac.ir

(تاریخ دریافت مقاله: ۱۳۹۸/۰۴/۲۰ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۳۹۹/۰۸/۱۲)

## چکیده

### واژه‌های کلیدی

پایداری سیگنال کوچک،

بررسی احتمالاتی سیستم‌های قدرت،

روش تقریب چند جمله ای هرمیت.

با گسترش روزافزون سیستم های قدرت، عوامل تصادفی موثر بر عملکرد این سیستم ها نیز افزایش یافته اند. افزایش تقاضا برای انرژی الکتریکی به همراه عوامل تصادفی مذکور موجب شده اند که روش های تحلیل عدم قطعیت، اهمیت ویژه ای در تحلیل پایداری سیگنال کوچک سیستم های قدرت پیدا کنند. در این مقاله روشی بر اساس تقریب چند جمله ای برای تحلیل پایداری احتمالاتی سیگنال کوچک سیستم های قدرت ارائه شده است. از آنجا که تعیین صحیح ضرایب مجهول، اثر مستقیمی بر دقت روش تقریب چند جمله ای می گذارد، در این مقاله روشی ارائه شده که قادر است ضرایب مذکور را با پوشش بیشتری بر فضای احتمالاتی ورودی مساله تعیین کند و علاوه بر آن، با افزایش تعداد متغیرهای تصادفی ورودی همچنان کارایی خود را حفظ کند. پس از تعیین ضرایب مجهول، نتایج پخش بار و ماتریس حالت سیستم به ازای تغییرات تصادفی تمامی بارها و بر اساس تقریب چند جمله ای هرمیت تعیین می شود. سپس، مقادیر ویژه سیستم بصورت احتمالاتی تعیین می شوند و پایداری سیگنال کوچک سیستم مورد مطالعه قرار می گیرد. به منظور بررسی صحت و کارایی روش پیشنهادی، شبکه نمونه ۱۴ باس IEEE در نرم افزار MATLAB شبیه سازی شده است و نتایج حاصل از روش پیشنهادی با نتایج حاصل از دو روش مرسوم تخمین نقطه و مونت کارلو مقایسه شده است. بررسی نتایج نشان داده است که روش پیشنهادی این مقاله علاوه بر صحت، از دقت مناسب و سرعت محاسبات بالایی برخوردار می باشد.



Sahand University  
of Technology

Journal of Nonlinear  
Systems in Electrical  
Engineering

Vol.7, No.1

Spring and Summer 2020

ISSN: 2322 – 3146

<http://jnsee.sut.ac.ir>

# Probabilistic Analysis of Small Signal Stability of a Power System Using Modeling Based on Hermit Polynomial Approximation under Load Uncertainty

Ali Mohammad Tabrizchi<sup>1</sup>, Mohammad Mahdi Rezaei<sup>2</sup>, Shahrokh Shojaeian<sup>3</sup> and Maryam Sharifdoost<sup>4</sup>

<sup>1</sup>PhD Candidate, Department of Electrical Engineering, KhomeiniShahr branch, Islamic Azad University, Isfahan, Iran, [alimohammad.tabrizchi@iaukhsh.ac.ir](mailto:alimohammad.tabrizchi@iaukhsh.ac.ir).

<sup>2</sup>**Corresponding Author**, Assistant Professor, Department of Electrical Engineering, KhomeiniShahr branch, Islamic Azad University, Isfahan, Iran, [mm.rezaei@iaukhsh.ac.ir](mailto:mm.rezaei@iaukhsh.ac.ir)

<sup>3</sup>Assistant Professor Department of Electrical Engineering, KhomeiniShahr branch, Islamic Azad University, Isfahan, Iran, [shojaeian@iaukhsh.ac.ir](mailto:shojaeian@iaukhsh.ac.ir).

<sup>4</sup>Assistant Professor, Mathematics and Statistics, KhomeiniShahr branch, Islamic Azad University, Isfahan, Iran, [sharifdoost@iaukhsh.ac.ir](mailto:sharifdoost@iaukhsh.ac.ir).

## ABSTRACT

### Keywords

With the increasing expansion of power systems, random factors affecting the performance of these systems have also increased. Increasing demand for electrical energy along with these random factors have made uncertainty analysis methods especially important in analyzing the small-signal stability of power systems. In this paper, a method based on the polynomial approximation is presented for the probabilistic small signal stability analysis of power systems. Since the correct determination of unknown coefficients has a direct effect on the accuracy of the polynomial approximation methods, this paper presents an approach that can determine the mentioned coefficients with high convergence on the probabilistic input space of the problem which can maintain its performance by increasing the number of input random variables. After determining the unknown coefficients, the load flow results and the system state matrix are determined for random changes of all loads using the Hermit polynomial approximation. Then, the system eigenvalues are determined and the small-signal stability of the system is probabilistically studied. In order to evaluate the accuracy and efficiency of the proposed method, the IEEE 14-bus test system is simulated in the MATLAB software and the results of the proposed method are compared with the results of the two conventional Point Estimation and Monte Carlo methods. The examination of the results show that the method proposed in this paper, in addition to convergence, has good accuracy and high computational speed.

small signal stability,  
probabilistic study of power  
systems,  
hermit polynomial  
approximation.

## ۱ - مقدمه

گسترش روزافزون شبکه قدرت موجب شده است که عوامل تصادفی بیشتری بر روی آن تأثیر بگذارد. پیچیده تر شدن سیستم، افزایش تغییرات بارها، نفوذ روزافزون منابع تجدید پذیر، توسعه خودروهای برقی، افزایش بارهای غیرخطی و ... از جمله عوامل تأثیرگذار مذکور می باشند. تغییرات تصادفی توان بار در شبکه قدرت، می تواند عاملی برای تهدید پایداری سیستم قدرت باشد. این تغییرات مداوم بوده و بررسی تأثیر آن بر روی پایداری اهمیت زیادی در کنترل، بهره برداری و برنامه ریزی سیستم های قدرت دارد.

تحلیل پایداری سیگنال کوچک یک روش سریع و کارآمد برای ارزیابی شرایط سیستم‌های قدرت است که بر اساس تحلیل موقعیت مقادیر ویژه انجام می‌شود. با توجه به اینکه سیستم قدرت یک سیستم غیرخطی چند متغیره است، برای انجام تحلیل پایداری سیگنال کوچک، معادلات حالت سیستم حول نقطه کار خطی سازی می‌شود و بر این اساس، ماتریس حالت سیستم تشکیل شده و مقادیر ویژه آن مورد محاسبه و تحلیل قرار می‌گیرند. اما از آنجا که توان مصرفی بارها دارای عدم قطعیت و تغییرات تصادفی است، نقطه کار سیستم نیز در اثر تغییرات بار، بطور تصادفی جابجا می‌شود. بنابراین، استفاده از روش‌های مرسوم که در آنها با ثابت در نظر گرفتن نقطه کار، مقادیر ویژه سیستم تعیین و تحلیل می‌شوند، نمی‌تواند ارزیابی فراگیر و قابل اعتمادی را به همراه داشته باشند.

در مقابل، اگر رفتار سیستم با توجه به تأثیر تغییرات تصادفی پارامترهای غیر قطعی پیش بینی و بصورت احتمالاتی تحلیل شود، می‌تواند ارزیابی دقیق‌تری از وضعیت سیستم قدرت ارائه کند و از اتخاذ تصمیمات فنی و اقتصادی بیش از حد محتاطانه و غیر بهینه جلوگیری کند [۱]. تاکنون، برای بررسی پدیده‌های تصادفی از روش‌های مختلفی مانند روش بهینه سازی مقاوم، روش مبتنی بر تعیین بازه، روش بررسی امکان‌پذیری و روش احتمالاتی برای مدل‌سازی تغییرات تصادفی استفاده شده است که مؤثرترین آنها، روش‌های احتمالاتی است [۲-۴]. در یک روش احتمالاتی، تغییرات تصادفی متغیرهای ورودی به صورت تابع توزیع احتمال مدل سازی شده و بر اساس آن، تابع توزیع تجمعی<sup>۱</sup> (CDF) و یا تابع چگالی احتمال<sup>۲</sup> (PDF) متغیرهای تصادفی خروجی سیستم محاسبه می‌شود.

روش‌های احتمالاتی که تاکنون ارائه شده اند را می‌توان به دودسته عددی و تحلیلی تقسیم نمود. یکی از روش‌های عددی مرسوم برای تحلیل احتمالاتی فرایندهای تصادفی، روش شبیه سازی مونت کارلو<sup>۳</sup> (MCS) است. در این روش، تعداد نقاط بسیار زیادی از ورودی‌های تصادفی انتخاب می‌شود و به ازای هر یک از آنها مسئله پایداری بصورت قطعی بررسی می‌شود. سپس، بر اساس نتایج حاصل از آن، توابع PDF، CDF و یا دیگر معیارهای سنجش مانند میانگین یا انحراف معیار متغیرهای تصادفی خروجی مورد محاسبه قرار می‌گیرد. به دلیل حجم محاسبات بسیار بالا و زمانبر بودن روش مونت کارلو، در حال حاضر از این روش به عنوان ملاک بررسی صحت و دقت سایر روش‌های تحلیل احتمالاتی استفاده می‌شود. اخیراً روش‌های عددی بهبودیافته‌ای مانند روش مونت کارلو ترتیبی و شبه ترتیبی نیز ارائه شده است که حجم محاسبات را اندکی کاهش داده اند، اما همچنان استفاده از آنها بسیار زمان‌بر است [۵-۸].

یکی از روش‌های تحلیلی بررسی پایداری سیگنال کوچک سیستم‌های قدرت، روش تخمین نقطه<sup>۴</sup> (PEM) است [۹-۱۱]. در روش تخمین نقطه، به ازای تعدادی نقطه کار خاص محاسبات پخش بار انجام می‌شود و بر اساس آن میانگین، انحراف

<sup>1</sup> Cumulative distribution function

<sup>2</sup> Probability density function

<sup>3</sup> Monte Carlo simulation

<sup>4</sup> Point estimate method

معیار و گشتاورهای احتمالاتی متغیرهای خروجی محاسبه می‌شود. اگرچه روش تخمین نقطه قادر است غیرخطی بودن معادلات سیستم‌ها را حفظ کند، اما، دقت آن در برآورد گشتاورهای مرتبه بالای تابع توزیع احتمال متغیرهای خروجی، به ویژه برای سیستم‌هایی که پیچیده باشند و متغیرهای تصادفی ورودی زیادی داشته باشند، چندان بالا نیست [۱۲].

روش انباشتک<sup>۱</sup> (CM) یکی دیگر از روش‌های متداول تحلیل‌های احتمالاتی در سیستم‌های قدرت است که در آن با خطی سازی معادلات سیستم حول نقطه کار نامی، یک مدل خطی بین متغیرهای تصادفی خروجی و ورودی تعیین می‌شود [۱۳-۱۵]. سپس با استفاده از انباشتک‌های متغیرهای تصادفی ورودی و مدل خطی بین متغیرهای تصادفی خروجی بدست می‌آید. مهمترین مزیت روش انباشتک این است که حجم محاسبات بسیار کمی دارد و بنابراین از سرعت اجرای بالایی برخوردار است. اما در مقابل، به دلیل خطی سازی معادلات حاکم بر سیستم حول نقطه کار نامی، هنگامی که متغیرهای تصادفی ورودی تغییرات قابل توجهی نسبت به مقدار نامی خود داشته باشند، دقت این روش تحت تاثیر قرار می‌گیرد [۱۱].

علاوه بر این، از آنجا که در روش‌های تخمین نقطه و انباشتک، امکان محاسبه مستقیم توابع توزیع احتمال متغیرهای تصادفی خروجی وجود ندارد، برای تقریب توابع PDF و CDF متغیرهای مذکور از سری‌هایی مانند سری گرام-چارلیر<sup>۲</sup>، سری کورنیش-فیشر<sup>۳</sup> یا سری اجورث<sup>۴</sup> استفاده می‌شود [۱۰-۱۵]. اما بررسی‌ها نشان می‌دهد که توابع توزیع احتمال به دست آمده از این روش‌ها دقت بالایی ندارند و حتی در برخی موارد، تابع CDF حاصل از آن، مقادیر منفی نیز تولید می‌کنند [۱۶].

استفاده از تقریب چند جمله‌ای<sup>۵</sup> روشی است که اخیراً برای غلبه بر معایب روش‌های عددی و تحلیلی در بررسی پدیده‌های تصادفی سیستم‌های قدرت ارائه شده است و نتایج قابل قبولی را به همراه داشته است [۱۷-۲۴]. در [۱۷-۱۸]، محاسبات پخش بار احتمالاتی یک شبکه توزیع تحت شرایط تغییرات تصادفی بار بر مبنای تقریب چندجمله‌ای انجام شده است و کارایی روش مذکور، از طریق مقایسه با روش مونت کارلو مورد بررسی قرار گرفته است. از روش تقریب چند جمله‌ای در برنامه ریزی [۱۹] و تحلیل دینامیکی [۲۱] سیستم‌های قدرت نیز استفاده شده است که نتایج قابل قبول و سرعت محاسبات خوبی به همراه داشته است.

در روش تقریب چند جمله‌ای، معادلات غیر خطی حاکم بر سیستم قدرت با استفاده از یک چند جمله‌ای آشوب تقریب زده می‌شود. متغیرهای ورودی چندجمله‌ای مذکور، متغیرهای تصادفی ورودی سیستم قدرت و خروجی آن بسته به نوع مساله، متغیرهای تصادفی است که ویژگی‌های احتمالاتی مانند میانگین، انحراف معیار و یا توابع توزیع احتمال، جزء مجهولات مساله مورد نظر در بررسی سیستم قدرت به شمار می‌رود. مهم‌ترین مزیت روش مذکور این است که بدون استفاده از سری‌های عددی و به طور مستقیم می‌توان توابع توزیع احتمال متغیرهای تصادفی خروجی را به دست آورد، که علاوه بر سرعت زیاد از دقت مناسبی نیز برخوردار می‌باشند. اما، عملکرد مناسب روش تقریب چند جمله‌ای وابسته به چند عامل کلیدی است که مهمترین آنها، انتخاب نوع و درجه چند جمله‌ای و همچنین تعیین مناسب ضرایب مجهول آن است [۲۵]. چندجمله‌ای‌های مختلفی وجود دارد که قادرند معادلات حاکم بر سیستم‌های احتمالاتی را مدل سازی کنند. اما در بین آنها، چند جمله‌ای هرمیت با شرایط سیستم‌های قدرت و بازه تغییرات متغیرهای تصادفی آن تطابق بیشتری دارد [۲۵].

در [۲۱]، بمنظور بررسی تغییرات تصادفی توان تولیدی نیروگاه‌های خورشیدی بر پایداری سیگنال کوچک یک سیستم قدرت، از روش تقریب چند جمله‌ای استفاده شده است. اما، از آنجا که چند جمله‌ای پیشنهاد شده در [۲۱] یک چند جمله‌ای هرمیت درجه یک می‌باشد، نتایج بدست آمده از دقت بالایی برخوردار نیست. اما افزایش درجه چند جمله‌ای علاوه بر دقت، حجم

<sup>1</sup> Cumulant method

<sup>2</sup> Gram-Charlier

<sup>3</sup> Cornish-Fisher

<sup>4</sup> Edgworth

<sup>5</sup> Polynomial approximation method

محاسبات را هم به شدت افزایش می‌دهد. مطالعات انجام شده در [۲۲-۲۴] نشان داده است که برای یک حجم محاسبات معقول، استفاده از چندجمله‌ای هرمیت با درجه ۲ کارایی و دقت قابل قبولی از خود به نمایش می‌گذارد.

مسئله مهم دیگری که در روش تقریب چند جمله‌ای وجود دارد و اثر قابل توجهی بر کارایی آن می‌گذارد، تعیین ضرایب مجهول آن است. در [۲۲]، از یک چندجمله‌ای هرمیت درجه ۲ برای بررسی پایداری ولتاژ یک سیستم قدرت استفاده شده است. بمنظور تعیین ضرایب مجهول چندجمله‌ای در [۲۲]، از روش گالرکین<sup>۱</sup> استفاده شده است. در روش گالرکین، معادلات غیرخطی حاکم بر سیستم و چندجمله‌ای که معادلات مذکور را تقریب می‌زند با یکدیگر ترکیب می‌شوند و یک دستگاه معادلات چند مجهولی تشکیل می‌شود. با حل این دستگاه معادلات، ضرایب مجهول مورد نظر تعیین می‌شوند. اما، تعیین ضرایب مجهول با استفاده از روش گالرکین دو عیب مهم دارد. اول اینکه، استفاده از این روش موجب ایجاد تغییر در معادلات مسئله می‌شود و بنابراین راه حل جامعی به شمار نمی‌رود و برای هر مسئله‌ای دستگاه معادلات باید بصورت جداگانه تشکیل و حل شود. مشکل دوم این است که، با بزرگتر شدن ابعاد مسئله و افزایش تعداد متغیرهای تصادفی ورودی و خروجی، پیچیدگی معادلات بطور تصاعدی افزایش می‌یابد و موجب افزایش حجم محاسبات و زمان مورد نیاز برای حل مسئله می‌شود.

در [۲۳]، مسئله پخش بار احتمالاتی سیستم‌های قدرت با استفاده از چندجمله‌ای هرمیت درجه ۲ تقریب زده شده و ضرایب مجهول آن با استفاده از روش همایند<sup>۲</sup> تعیین گردیده است. در روش همایند، با استفاده از ریشه‌های چند جمله‌ای هرمیت با یک درجه بالاتر، نقاط خاصی از متغیرهای تصادفی ورودی تعیین می‌شود و بر اساس آنها، معادلات مسئله بصورت قطعی حل می‌شود. به بیان دیگر، با استفاده از این روش، ورودیها و خروجی‌های چند جمله‌ای هرمیت به ازای چند نقطه خاص مشخص می‌شود که می‌توان با استفاده از آنها، ضرایب مجهول را تعیین نمود.

در [۲۴]، بررسی احتمالاتی پایداری سیگنال کوچک یک سیستم قدرت بر اساس روش تقریب چند جمله‌ای انجام شده است. ضرایب چند جمله‌ای هرمیت استفاده شده در [۲۴] نیز بر اساس روش همایند و مشابه با فرایند بکار رفته در [۲۳]، تعیین شده است. این روش، بر خلاف روش گالرکین، تغییری در معادلات سیستم ایجاد نمی‌کند و از اینرو روشی جامع به شمار می‌رود. اما، مشکل فرایند اجرای روش همایند در [۲۳] و [۲۴] این است که تنها به ازای تعداد محدود متغیرهای ورودی تصادفی کارایی دارد و با افزایش تعداد متغیرهای مذکور، زمان و حجم محاسبات بطور تصاعدی افزایش می‌یابد و حتی در بعضی موارد به واگرایی آن منجر می‌شود.

در این مقاله، پایداری احتمالاتی سیگنال کوچک یک سیستم قدرت بر اساس روش تقریب چند جمله‌ای مورد تحلیل قرار گرفته است. در روش ارائه شده، ابتدا محاسبات پخش بار یک سیستم قدرت توسط چند جمله‌ای هرمیت درجه ۲ تقریب زده شده و سپس ضرایب مجهول آن با استفاده از یک راهکار جدید مبتنی بر روش همایند تعیین گردیده است. فرایند پیشنهادی این مقاله قادر است به ازای هر تعداد متغیر تصادفی ورودی ضرایب چند جمله‌ای را بدون واگرایی و در زمان بسیار کمتری نسبت به مراجع [۲۳] و [۲۴] تعیین کند. پس از آن، مقادیر ویژه سیستم با استفاده از نتایج تقریب زده شده پخش بار و همچنین مدل ژنراتورها مورد محاسبه قرار گرفته است. در این روش، با حجم و زمان محاسبات بسیار کمتر از روش‌های عددی و بدون استفاده از تقریب توسط سری‌ها که در روش‌های تحلیلی مورد استفاده قرار می‌گیرد، توابع توزیع احتمال مقادیر ویژه سیستم، به ازای تغییر تصادفی توان مصرفی تمامی بارها و جابجایی نقطه کار ناشی از آن، تعیین گردیده است. بررسی نتایج حاصل از شبیه‌سازی و مقایسه آن با یک روش عددی و یک روش تحلیلی، یعنی روش‌های مونت کارلو و تخمین نقطه، نشان می‌دهد که روش پیشنهادی علاوه بر صحت از دقت و سرعت قابل قبولی نیز برخوردار می‌باشد.

<sup>1</sup> Galerkin method

<sup>2</sup> Collocation method

## ۲- مدل کاهش یافته ژنراتور سنکرون

هنگامی که سیستم قدرت در حالت ماندگار قرار دارد، می‌توان معادلات حالت آن را حول نقطه کار خطی سازی نمود و بر اساس معادلات مذکور، مقادیر ویژه سیستم را تعیین کرد. از آنجا که مقادیر ویژه بحرانی بدست آمده از مدل درجه ۳ تفاوت چندانی با مقادیر بدست آمده از مدل درجه ۸ ندارند [۲۶]، در این مقاله برای تحلیل پایداری سیگنال کوچک سیستم قدرت، از مدل کاهش یافته درجه ۳ ژنراتور سنکرون به همراه مدل سیستم تحریک استفاده شده است. مدل مذکور توسط معادلات (۱)-(۴) بیان شده است [۲۶].

$$\dot{E}'_q = -\frac{1}{T'_{do}} [E'_q + (X_q - X'_d)I_d - E_{fd}] \quad (1)$$

$$\dot{\delta} = \omega - \omega_s \quad (2)$$

$$\dot{\omega} = \frac{\omega_s}{2H} \{T_M - [E'_q I_q + (X_q - X'_d)I_d I_q + D(\omega - \omega_s)]\} \quad (3)$$

$$\dot{E}_{fd} = -\frac{1}{T_A} [E_{fd} - K_A(V_{ref} - V_t)] \quad (4)$$

در این رابطه  $\delta$  زاویه روتور،  $\omega$  سرعت روتور،  $E'_q$  ولتاژ گذرا در راستای محور عمودی،  $E_{fd}$  ولتاژ تحریک،  $V_t$  اندازه ولتاژ ترمینال،  $V_{ref}$  مقدار مرجع ولتاژ ترمینال و  $I_q$  و  $I_d$  جریان ژنراتور در راستای محورهای عمودی و مستقیم است.  $T'_{do}$  نیز ثابت زمانی محور مستقیم ژنراتور سنکرون در حالت گذرا و  $T_A$  و  $K_A$  نیز به ترتیب ثابت زمانی و بهره سیستم تحریک می‌باشند. با بازنویسی معادلات (۱)-(۴) و منظم کردن آنها به فرم ماتریسی، خواهیم داشت [۲۶]:

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (5)$$

که در آن  $x$ ،  $u$ ،  $A$  و  $B$  عبارتند از:

$$x = [E'_q \quad \delta \quad \omega/\omega_s \quad E_{fd}]^T \quad (6)$$

$$u = [\Delta V_{ref}] \quad (7)$$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -K_4 & 0 & 1 \\ K_3 T'_{do} & T'_{do} & 0 & T'_{do} \\ 0 & 0 & \omega_s & 0 \\ -K_2 & -K_1 & -D\omega_s & 0 \\ \frac{2H}{2H} & \frac{2H}{2H} & \frac{2H}{2H} & 0 \\ -K_A K_6 & -K_A K_5 & 0 & -1 \\ \frac{1}{T_A} & \frac{1}{T_A} & 0 & \frac{1}{T_A} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{K_A}{T_A} \end{bmatrix} \quad (8)$$

در این روابط، ضرایب  $K_1$  تا  $K_6$  و  $\Delta$  عبارتند از:

$$K_1 = -\frac{1}{\Delta} (I_q^0 V_t^0 (X'_d - X_q) [(X_q + X_e) \sin \delta^0 - R_e \cos \delta^0]) \quad (9)$$

$$K_2 = \frac{1}{\Delta} (I_q^0 \Delta - I_q^0 (X'_d - X_q) (X_q + X_e) - R_e (X'_d - X_q) I_d^0 - R_e E'^0) \quad (10)$$

$$K_3 = -\frac{V_t^0 (X_d - X'_d)}{\Delta} ((X_q + X_e) \sin \delta^0 - R_e \cos \delta^0) \quad (11)$$

$$K_4 = \frac{\Delta}{\Delta + (X_d - X'_d)(X_q + X_e)} \quad (12)$$

$$K_5 = \frac{1}{\Delta} \left\{ \frac{V_d^0}{V_t^0} X_q [R_e V_t^0 \sin \delta^0 + (X'_d + X_e) V_t^0 \cos \delta^0] + \frac{V_q^0}{V_t^0} X'_d [R_e V_t^0 \cos \delta^0 - (X_q + X_e) V_t^0 \sin \delta^0] \right\} \quad (13)$$

$$K_6 = \frac{1}{\Delta} \left\{ \frac{V_d^0}{V_t^0} X_q R_e - \frac{V_q^0}{V_t^0} X'_d (X_q + X_e) \right\} + \frac{V_q^0}{V_t^0} \quad (14)$$

$$\Delta = R_e^2 + (X'_d + X_e)(X_q + X_e) \quad (15)$$

اکنون، مقادیر ویژه هر یک از ژنراتورهای سیستم را می‌توان با استفاده از ماتریس حالت  $A$  و ماتریس همبندی  $I$  و بر اساس رابطه  $\det(\lambda I - A) = 0$  محاسبه نمود که در آن، مقادیر ویژه سیستم می‌باشند.

### ۳- تحلیل احتمالاتی پایداری سیگنال کوچک سیستم‌های قدرت

همانطور که در روابط (۸)–(۱۵) مشاهده می‌شود، مقادیر ویژه سیستم بر اساس نقطه کار و با استفاده از نتایج حاصل از پخش بار محاسبه می‌شوند. در شرایطی که بارهای سیستم دارای عدم قطعیت باشد، نقطه کار جابجایی‌های تصادفی خواهد داشت. در این شرایط، محاسبات مکرر پخش بار و تعیین نقطه کار با استفاده از روش‌های عددی، بسیار حجیم و زمان‌بر خواهد بود. در این مقاله، از روش تقریب چند جمله‌ای برای به دست آوردن سریع ماتریس حالت و مقادیر ویژه آن استفاده شده است. در این روش، معادلات غیر خطی پخش بار که توان شین‌های بار و تولید (ورودی‌های مساله) را بر حسب ولتاژ باس‌های سیستم (خروجی‌های مساله) بیان می‌کنند، با یک دستگاه معادلات، شامل چند جمله‌ای‌های هرمیت مدل می‌شود. ضرایب چند جمله‌ای‌های مذکور مجهول هستند اما در صورتی که به درستی تعیین شوند، می‌توان به جای انجام محاسبات پخش بار با روش‌های عددی، ولتاژ باس‌های سیستم یا جریان خروجی ژنراتورها را مستقیماً بر اساس توان‌های اکتیو و راکتیو بار و تولید، محاسبه نمود. برای تعیین ضرایب چند جمله‌ای مذکور، ابتدا با استفاده از روش‌های قطعی، مسئله پخش بار برای چند نقطه نمونه حل می‌شود و سپس، با استفاده از نتایج حاصل از آن و همچنین نقاط نمونه ورودی، ضرایب چند جمله‌ای هرمیت تعیین می‌شود. در ادامه، روش تقریب چند جمله‌ای، با بیان جزئیات آن، تشریح خواهد شد.

#### ۳-۱- تقریب چند جمله‌ای محاسبات پخش بار احتمالاتی

در این مقاله، توان مصرفی همه بارهای سیستم غیرقطعی در نظر گرفته شده و مطابق معمول با تابع توزیع احتمال نرمال مدل شده اند [۲۷]. در این مدل سازی، مقدار میانگین بار  $i$ ام  $(\mu_i)$  برابر با مقدار نامی آن و انحراف معیار بار  $i$ ام  $(\sigma_i)$  به اندازه ۱۰٪ مقدار نامی بار مذکور در نظر گرفته شده است. برای استفاده از روش تقریب چند جمله‌ای، لازم است ورودی‌های غیر قطعی مساله به صورت متغیرهای تصادفی نرمال استاندارد بیان شوند [۲۵]. بنابراین، بمنظور تبدیل تغییرات بار از توزیع نرمال به توزیع نرمال استاندارد و بالعکس، از روابط (۱۶) و (۱۷) استفاده شده است:

$$x_i = \mu_i + \sigma_i \eta_i \quad (16)$$

$$\eta_i = \frac{x_i - \mu_i}{\sigma_i} \quad (17)$$

که در آن،  $x_i$  متغیر تصادفی ورودی  $i$ ام مساله (بار  $i$ ام سیستم)،  $\eta_i$  یک متغیر تصادفی نرمال استاندارد است. اگر  $Y$  بردار نتایج پخش بار باشد، روابط پخش بار را می‌توان با استفاده از تقریب چندجمله‌ای هرمیت، به صورت زیر تعیین نمود [۲۲–۲۴].

$$Y = k_0 + \sum_{j_1=1}^m k_{j_1} \Gamma_1(\eta_{j_1}) + \sum_{j_1=1}^m \sum_{j_2=1}^{j_1} k_{j_1 j_2} \Gamma_2(\eta_{j_1}, \eta_{j_2}) + \sum_{j_1=1}^m \sum_{j_2=1}^{j_1} \sum_{j_3=1}^{j_2} k_{j_1 j_2 j_3} \Gamma_3(\eta_{j_1}, \eta_{j_2}, \eta_{j_3}) + \dots \quad (18)$$

که در آن،  $m$  تعداد متغیرهای تصادفی ورودی و  $k_j$  ضرایب مجهول چند جمله‌ای آشوب است. این ضرایب باید به نحوی تعیین شوند که معادله فوق بتواند به ازای مقادیر متغیرهای تصادفی ورودی (تغییرات بار)، نتایج پخش بار را تعیین کند. در رابطه (۱۸)،  $\Gamma_n$  چندجمله‌ای هرمیت از درجه  $n$  است که معادله کلی آن از رابطه (۱۹) تعیین می‌شود [۲۲–۲۴].

$$\Gamma_n(\eta_{j_1}, \eta_{j_2}, \dots, \eta_{j_n}) = (-1)^n e^{0.5\eta^T \eta} \frac{\partial^n}{\partial \eta_{j_1} \partial \eta_{j_2} \dots \partial \eta_{j_n}} e^{-0.5\eta^T \eta} \quad (19)$$

به‌عنوان مثال چندجمله‌ای‌های هرمیت از درجه  $n = 1$  تا  $n = 3$  با روابط (۲۰) قابل بیان است:

$$\begin{aligned} \Gamma_0(\eta) &= 1, \quad \Gamma_1(\eta) = \eta, \quad \Gamma_2(\eta) = \eta^2 - 1, \quad \Gamma_3(\eta) = \eta^3 - 3\eta, \\ \Gamma_4(\eta) &= \eta^4 - 6\eta^2 + 3, \quad \Gamma_5(\eta) = \eta^5 - 10\eta^3 + 15\eta \end{aligned} \quad (20)$$

مقایسه دقت درجه‌های مختلف چندجمله‌ای‌های هرمیت نشان داده است که پاسخ به‌دست آمده از چندجمله‌ای با درجه ۲ تفاوت ناچیزی با پاسخ حاصل از چندجمله‌ای‌های هرمیت با درجه‌های ۳ و بالاتر دارد [۲۲-۲۴]. از اینرو، در این مقاله برای مدل‌سازی محاسبات پخش بار، از چندجمله‌ای‌های هرمیت با درجه ۲ استفاده شده است. اگر  $Y_l$  متغیر خروجی  $l$ ام مساله پخش بار باشد، می‌توان آنرا بر حسب متغیرهای ورودی، به‌صورت رابطه (۲۱) بیان نمود.

$$Y_l = k_{0,l} + \sum_{j=1}^m k_{j,l} \eta_j + \sum_{j=1}^m k_{jj,l} (\eta_j^2 - 1) + \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j>i}^m k_{ij,l} \eta_i \eta_j \quad (21)$$

### ۳-۲- تعیین ضرایب مجهول چند جمله‌ای هرمیت

برای محاسبه ضرایب مجهول  $k_0, k_j, k_{jj}, k_{ij}$  در رابطه (۲۱)، ابتدا لازم است چند نقطه نمونه، با مقادیر خاصی از  $\eta$  تعیین شود. مقادیر نمونه باید از جایگشت صفر و ریشه‌های چندجمله‌ای‌های هرمیت درجه سه، به‌صورت تصادفی انتخاب شود. تعداد نقاط نمونه نیز به درجه چند جمله‌ای و تعداد متغیرهای تصادفی سیستم بستگی دارد و از رابطه (۲۲) تعیین می‌شود [۲۸].

$$r \simeq \frac{(m+n)!}{m!n!} \quad (22)$$

در این رابطه  $r, n, m$  به ترتیب تعداد نقاط نمونه، درجه چندجمله‌ای‌های هرمیت و تعداد متغیرهای تصادفی می‌باشند. با بازنویسی رابطه (۲۱)، می‌توان یک معادله ماتریسی به فرم زیر تشکیل داد:

$$[M][K] = [Y] \quad (23)$$

که در آن  $[K]$  بردار ضرایب مجهول و  $[Y]$  بردار نتایج پخش بار است. معادله سطر  $l$ ام رابطه (۲۳) را می‌توان به ازای  $m$  متغیر تصادفی ورودی بصورت زیر بیان کرد:

$$[1 \quad \eta_{1l} \quad \eta_{2l} \quad \dots \quad \eta_{ml} \quad \eta_{1l}^2 - 1 \quad \eta_{2l}^2 - 1 \quad \dots \quad \eta_{ml}^2 - 1 \quad \eta_{1l}\eta_{2l} \quad \eta_{1l}\eta_{3l} \quad \dots \quad \eta_{m-1l}\eta_{ml}] [K] = Y_l \quad (24)$$

همانطور که در رابطه (۲۴) قابل مشاهده است، ماتریس  $[M]$  یک ماتریس مربعی  $(r \times r)$  است که سطر  $l$ ام آن از عدد یک و ترکیب مقادیر  $[\eta_l] = [\eta_{1l} \quad \eta_{2l} \quad \dots \quad \eta_{ml}]$  تشکیل شده است. به بردار  $[\eta_l]$ ، که در حقیقت یکی از نقاط کار سیستم است، نقطه همایند<sup>۱</sup> گفته می‌شود [۲۸]. باید توجه داشت که برای تعیین ضرایب مجهول  $[K]$ ، لازم است  $r$  نقطه همایند به صورتی انتخاب شوند که پس از تشکیل ماتریس  $[M]$  و جایگذاری در رابطه (۲۳) یک دستگاه معادلات مستقل خطی بوجود آورند، تا مسئله تنها یک جواب منحصر به فرد داشته باشد. به عبارت دیگر نقاط همایند باید به گونه‌ای انتخاب شوند که رتبه<sup>۲</sup> ماتریس  $[M]$  کامل و برابر با  $r$  باشد. از آنجا که دقت انجام محاسبات پخش بار با استفاده از تقریب چندجمله‌ای وابستگی زیادی به تعیین صحیح ضرایب مجهول دارد، لازم است نقاط همایند طوری انتخاب شوند که علاوه بر کامل بودن رتبه ماتریس  $[M]$ ، حداکثر پوشش را بر فضای احتمالاتی  $m$  بعدی ورودی مساله، داشته باشند.

روش ارائه شده در [۲۲-۲۴] به این صورت است که ابتدا یک گروه بزرگ از نقاط همایند تشکیل می‌شود و سپس با انتخاب  $r$  نقطه از آن، ماتریس  $[M]$  تشکیل شده و رتبه آن محاسبه می‌شود. اگر رتبه بدست آمده کمتر از  $r$  باشد، سطرهای غیر مستقل ماتریس  $[M]$  حذف می‌شوند. سپس به همان تعداد، نقطه همایند جدید انتخاب و سطرهای ماتریس  $[M]$  جایگزین می‌شوند و دو

<sup>1</sup> Collocation point

<sup>2</sup> Rank



مرتبه رتبه آن محاسبه می‌شود. این فرایند تا جایی تکرار می‌شود که یک ماتریس  $[M]$  با رتبه  $r$  تشکیل شود. روش ارائه شده در [۲۴-۲۵] به ازای «سه» متغیر تصادفی ورودی مورد شبیه‌سازی قرار گرفته و نتایج قابل قبولی داشته است. اما، این روش تنها هنگامی کارایی دارد که تعداد متغیرهای ورودی مساله کم باشد و  $r$  عدد بزرگی نباشد. زیرا، هنگامی که  $r$  افزایش می‌یابد، ابعاد ماتریس  $[M]$  نیز به همان میزان بیشتر می‌شود. از آنجا که در هر تکرار از فرایند تشکیل ماتریس  $[M]$  رتبه آن باید محاسبه شود، استفاده روش ارائه شده در [۲۴-۲۲] بسیار زمانبر خواهد بود. علاوه بر این، اگر فرایند تکراری مذکور بطور کامل طی شود و ماتریسی با رتبه کامل تشکیل نشده باشد، روش ارائه شده در [۲۴-۲۲] عملاً واگرا می‌گردد.

در این مقاله، روش جدیدی برای تشکیل ماتریس  $[M]$  و محاسبه ضرایب مجهول چند جمله‌ای هر میت پیشنهاد شده است. در روش پیشنهادی این مقاله، ابتدا یک گروه  $R$  تایی از نقاط همایند با ترکیب تصادفی اعداد صفر و ریشه‌های چندجمله‌ای هر میت درجه سه، تشکیل می‌شود. سپس به هر یک از اعضای گروه مذکور، یک سطر از ماتریس  $[M]$  تشکیل می‌شود. از آنجا که در آن  $r \gg R$  می‌باشد، با زیر هم قرار دادن این سطرها، ماتریس  $[M_g]$  با ابعاد  $(R \times r)$  بدست می‌آید. سپس رتبه ماتریس  $[M_g]$  محاسبه می‌شود و در صورتی که رتبه آن  $r$  باشد، با حذف سطرها غیر مستقل آن، ماتریس  $[M]$  با رتبه کامل تشکیل می‌شود و فرایند خاتمه می‌یابد. بمنظور اطمینان از همگرایی، اگر رتبه ماتریس  $[M_g]$  کمتر از  $r$  باشد، گروه جدیدی از نقاط همایند تشکیل می‌شود و این فرایند دومرتبه تکرار می‌شود. اگر چه تعیین رتبه ماتریس  $[M_g]$  محاسبات بیشتری نسبت به تعیین رتبه ماتریس  $[M]$  دارد، اما باید توجه داشت که محاسبات تعیین رتبه در روش پیشنهادی تنها یک بار انجام می‌شود. روش پیشنهادی در این مقاله، در عین سادگی و قابلیت اجرا، سرعت محاسبات بالایی دارد، کارایی آن در اثر افزایش تعداد متغیرهای تصادفی ورودی کاهش نمی‌یابد و علاوه بر این، عملاً امکان واگرایی در آن وجود ندارد.

مقادیر بردار  $[Y]$  در دستگاه معادلات (۲۳)، از انجام محاسبات پخش بار به روش‌های قطعی بدست می‌آید. در محاسبات مذکور، نقاط همایند تشکیل دهنده ماتریس  $[M]$  ابتدا با استفاده از رابطه (۱۶) به متغیرهای واقعی (توان بار) تبدیل می‌شوند و سپس بر اساس آن، نتایج پخش بار بدست می‌آید. لازم به ذکر است که تنها به ازای تعداد  $r$  نقطه کار نمونه، پخش بار به روش قطعی انجام می‌شود. پس از آن، ضرایب مجهول بر اساس رابطه زیر محاسبه می‌شود.

$$[K] = [M]^{-1}[Y] \quad (25)$$

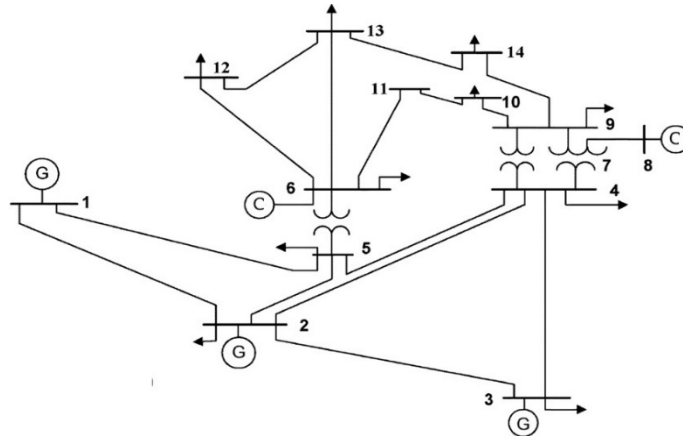
### ۳-۳- تحلیل پایداری سیگنال کوچک به روش احتمالاتی

هنگامی که ضرایب مجهول  $[K]$  در معادله (۲۳) تعیین شود، می‌توان به جای انجام محاسبات طولانی مرسوم، از معادله مذکور برای محاسبه مکرر نتایج پایداری احتمالاتی سیگنال کوچک، به ازای تغییرات تصادفی بارها استفاده کرد. برای این منظور، ابتدا مقادیر تصادفی بار با استفاده از رابطه (۱۷) به متغیرهای تصادفی نرمال استاندارد تبدیل می‌شود و سپس بر اساس رابطه (۲۴)، نتایج پخش بار تعیین می‌شود. اکنون اگر ماتریس حالت سیستم با استفاده از نتایج پخش بار محاسبه شود می‌توان بر اساس  $\det(\lambda I - A) = 0$  مقادیر ویژه سیستم را تعیین نمود. در ادامه نشان داده خواهد شد که استفاده از روش ارائه شده موجب می‌شود تحلیل احتمالاتی پایداری سیگنال کوچک سیستم‌های قدرت با دقتی مناسب و سرعتی بسیار بالا انجام پذیرد.

### ۴- ارائه نتایج و تحلیل آنها

در این بخش، پایداری احتمالاتی سیگنال کوچک سیستم قدرت نمونه ۱۴ باس IEEE، با استفاده از روش پیشنهادی در این مقاله مورد تحلیل و بررسی قرار گرفته است. تحلیل‌های انجام شده، بر اساس کد نویسی در محیط نرم افزار MATLAB و با استفاده از یک کامپیوتر شخصی با پردازنده مرکزی Core i7، رم ۸ گیگابایت و سیستم عامل ویندوز ۱۰ انجام شده است. شمای تک خط سیستم قدرت تحت مطالعه در شکل (۱) نشان داده شده است. به منظور بررسی صحت و دقت روش پیشنهادی، ابتدا

محاسبات پخش بار احتمالاتی سیستم مورد مطالعه با استفاده از روش تقریب چند جمله هرmit انجام شده است و نتایج حاصل از آن (که با عبارت PAM مشخص شده است) با روش عددی مونت کارلو (که با عبارت MC مشخص شده است) و روش تحلیلی تخمین نقطه (که با عبارت PEM مشخص شده است)، مقایسه شده است. شایان ذکر است، به منظور افزایش هرچه بیشتر دقت روش مونت کارلو، به عنوان یک روش مرجع، تعداد نقاط نمونه تغییرات تصادفی توان شینها برای محاسبات پخش بار به روش مونت کارلو ۱۰۰۰۰ نقطه انتخاب شده است.

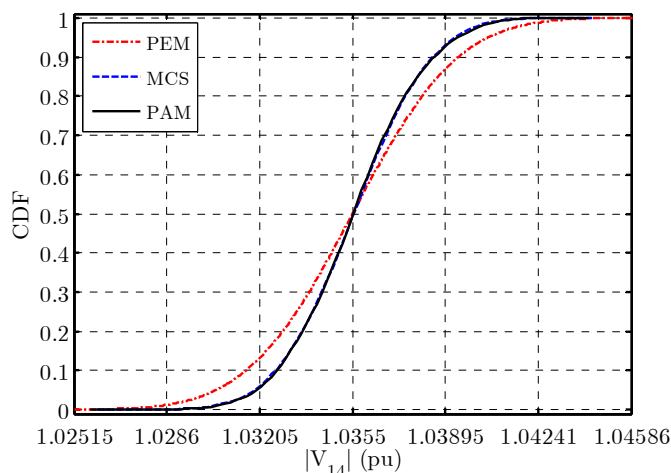


شکل ۱. سیستم ۱۴ شین IEEE [۲۹]

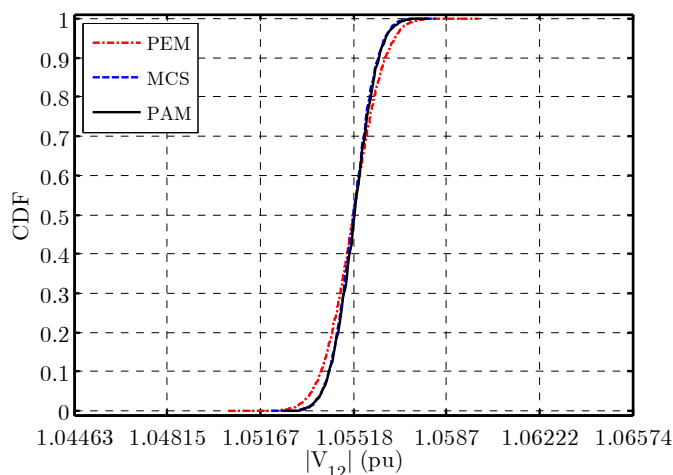
جدول ۱. میانگین و انحراف معیار ولتاژ باس ها در سیستم نمونه ۱۴ باس IEEE

شماره باس	انحراف معیار اندازه ولتاژ			مقدار متوسط اندازه ولتاژ		
	PEM	MC	PAM	PEM	MC	PAM
۱	۰	۰	۰	۱/۰۶	۱/۰۶	۱/۰۶
۲	۰	۰	۰	۱/۰۴۵	۱/۰۴۵	۱/۰۴۵
۳	۰	۰	۰	۱/۰۱	۱/۰۱	۱/۰۱
۴	۰/۰۰۱۴	۰/۰۰۱۱	۰/۰۰۱۲	۱/۰۱۷۶	۱/۰۱۷۶	۱/۰۱۷۶
۵	۰/۰۰۱۱	۰/۰۰۰۹	۰/۰۰۱	۱/۰۱۹۵	۱/۰۱۹۵	۱/۰۱۹۵
۶	۰	۰	۰	۱/۰۷	۱/۰۷	۱/۰۷
۷	۰/۰۰۱۲	۰/۰۰۱۲	۰/۰۰۱۲	۱/۰۶۱۵	۱/۰۶۱۵	۱/۰۶۱۵
۸	۰	۰	۰	۱/۰۹	۱/۰۹	۱/۰۹
۹	۰/۰۰۲۸	۰/۰۰۲۱	۰/۰۰۲۱	۱/۰۵۵۹	۱/۰۵۵۹	۱/۰۵۶
۱۰	۰/۰۰۲۶	۰/۰۰۱۹	۰/۰۰۱۹	۱/۰۵۱	۱/۰۵۰۹	۱/۰۵۱
۱۱	۰/۰۰۱۴	۰/۰۰۱	۰/۰۰۱	۱/۰۵۶۹	۱/۰۵۶۹	۱/۰۵۶۹
۱۲	۰/۰۰۱	۰/۰۰۰۷	۰/۰۰۰۷	۱/۰۵۵۲	۱/۰۵۵۲	۱/۰۵۵۲
۱۳	۰/۰۰۱۴	۰/۰۰۱	۰/۰۰۰۹	۱/۰۵۰۴	۱/۰۵۰۴	۱/۰۵۰۴
۱۴	۰/۰۰۳۱	۰/۰۰۲۲	۰/۰۰۲۲	۱/۰۳۵۵	۱/۰۳۵۵	۱/۰۳۵۶

در جدول (۱)، مقدار میانگین و انحراف معیار اندازه ولتاژ شین‌های سیستم بدست آمده از روش پیشنهادی با روش‌های مونت کارلو و تخمین نقطه مورد مقایسه قرار گرفته است. از آنجا که شین ۱ از نوع اسلک است و شین‌های {۲، ۳، ۶ و ۸} از نوع تولید هستند و ولتاژ آنها کنترل می‌شود، اندازه ولتاژ آنها در مقابل تغییرات تصادفی بار هیچ تغییری نداشته است و به همین دلیل انحراف معیار آنها در هر سه روش، برابر با صفر بدست آمده است. همانطور که مشاهده می‌شود، مقادیر متوسط اندازه ولتاژ به دست آمده از روش پیشنهادی، برای تمامی باس‌های سیستم نمونه، اختلاف بسیار ناچیزی و در حد  $10^{-5}$  با مقادیر بدست آمده از روش مونت کارلو دارد. اما، مقایسه انحراف معیار روش پیشنهادی با روش‌های مونت کارلو و روش تخمین نقطه نشان می‌دهد که روش پیشنهادی از دقت قابل قبولی برخوردار است.



شکل ۲. تابع توزیع تجمعی ولتاژ باس ۱۴



شکل ۳. تابع توزیع تجمعی ولتاژ باس ۱۲

همانطور که در جدول (۱) قابل مشاهده است، اندازه ولتاژ شین ۱۴ بیشترین انحراف معیار و ولتاژ شین ۱۲ کمترین انحراف معیار را در بین همه شین‌ها دارند. این موضوع نشان می‌دهد، ولتاژ شین ۱۴ بالاترین حساسیت و ولتاژ شین ۱۲ کمترین حساسیت را به تغییرات بار از خود نشان داده‌اند. تابع احتمال تجمعی اندازه ولتاژ شین‌های ۱۴ و ۱۲ به ازای تغییرات تصادفی تمامی بارها، به ترتیب در شکل‌های (۲) و (۳) نشان داده شده است. همانطور که مشاهده می‌شود، نتایج روش پیشنهادی این مقاله، برخلاف روش تخمین نقطه، اختلاف ناچیزی با نتایج روش مونت کارلو دارد. نکته قابل توجه این است که در هر سه روش، مقدار میانگین ولتاژ شین‌ها در هر سه روش یکدیگر منطبق است و آنچه باعث بروز اختلاف بین نتایج شده است، تفاوت قابل توجه انحراف معیار

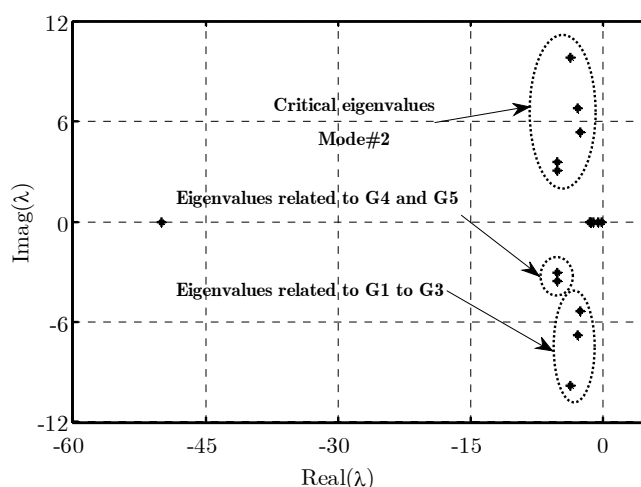
روش تخمین نقطه با روش مونت کارلو و روش پیشنهادی است. بنابراین می‌توان گفت روش پیشنهادی این مقاله، علاوه بر سرعت بیشتر، دقت مناسبی را نیز در محاسبات پخش بار احتمالاتی سیستم قدرت از خود به نمایش گذاشته است.

جدول (۲)، میانگین و انحراف معیار مقادیر ویژه سیستم تحت مطالعه را نشان می‌دهد. همانطور که مشاهده می‌شود، مقادیر میانگین بدست آمده از روش پیشنهادی اختلاف قابل توجهی با نتایج روش مونت کارلو و تخمین نقطه ندارد و تقریباً با یکدیگر برابرند. بررسی مقادیر انحراف معیار نیز نشان می‌دهد نتایج حاصل از روش پیشنهادی انطباق قابل قبولی بر نتایج روش مونت کارلو دارد. اما، انحراف معیار بدست آمده از روش تخمین نقطه با دو روش دیگر مقداری اختلاف دارد. دلیل این پدیده، تخمین تابع احتمال تجمعی در روش تخمین نقطه بر اساس سری کورنیش-فیشر است. اگر چه سری کورنیش-فیشر تخمین دقیقتری نسبت به سری های گرام-چارلیر یا اجورث ارائه می‌کند، اما روش پیشنهادی تخمین بسیار بهتری را به نمایش گذاشته است.

جدول ۲. میانگین و انحراف معیار مقادیر ویژه در سیستم نمونه ۱۴ باس IEEE

مقدار متوسط مقادیر ویژه	انحراف معیار مقادیر ویژه			شماره ژنراتور	مقدار ویژه
	MC	SRSM	PEM		
-۰/۱۶۷۸	-۰/۱۶۷۸	-۰/۱۶۷۸	-۰/۱۶۷۸	۱	۱
-۰/۵۸۴۱	-۰/۵۸۴۱	-۰/۵۸۴۱	-۰/۵۸۴۱	۲	
-۱/۱۳۱۵	-۱/۱۳۱۵	-۱/۱۳۱۷	-۱/۱۳۱۷	۳	
-۱/۳۸۹۴	-۱/۳۸۹۴	-۱/۳۹۰۲	-۱/۳۹۰۲	۴	
-۱/۴۱۲۷	-۱/۴۱۲۷	-۱/۴۱۲۹	-۱/۴۱۲۹	۵	
-۳/۶۶۰۸	-۳/۶۶۰۸	-۳/۶۶۰۸	-۳/۶۶۰۸	۱	۳، ۲
$\pm i9/8132$	$\pm i9/8132$	$\pm i9/8127$	$\pm i9/8127$	۱	
-۲/۷۸۳۶	-۲/۷۸۳۶	-۲/۷۸۳۷	-۲/۷۸۳۷	۲	
$\pm i6/7658$	$\pm i6/7658$	$\pm i6/7657$	$\pm i6/7657$	۲	
-۲/۵۱۳۶	-۲/۵۱۳۶	-۲/۵۱۳۵	-۲/۵۱۳۵	۳	
$\pm i5/3918$	$\pm i5/3918$	$\pm i5/3913$	$\pm i5/3913$	۳	
-۵/۱۴۶۰	-۵/۱۴۶۰	-۵/۱۴۵۶	-۵/۱۴۵۶	۴	۴
$\pm i3/0900$	$\pm i3/0900$	$\pm i3/0890$	$\pm i3/0890$	۴	
-۵/۱۳۴۷	-۵/۱۳۴۷	-۵/۱۳۴۶	-۵/۱۳۴۶	۵	
$\pm i3/5536$	$\pm i3/5536$	$\pm i3/5536$	$\pm i3/5539$	۵	
-۵۰	-۵۰	-۵۰	-۵۰	۱	
-۵۰/۰۰۴۵	-۵۰/۰۰۴۵	-۵۰/۰۰۴۵	-۵۰/۰۰۴۵	۲	۴
-۴۹/۹۹۷۲	-۴۹/۹۹۷۲	-۴۹/۹۹۷۲	-۴۹/۹۹۷۲	۳	
-۴۹/۹۹۶۷	-۴۹/۹۹۶۷	-۴۹/۹۹۶۷	-۴۹/۹۹۶۷	۴	
-۴۹/۹۹۶۶	-۴۹/۹۹۶۶	-۴۹/۹۹۶۶	-۴۹/۹۹۶۶	۵	
-۴۹/۹۹۶۶	-۴۹/۹۹۶۶	-۴۹/۹۹۶۶	-۴۹/۹۹۶۶	۵	

شکل (۴)، نمودار میانگین مقادیر ویژه سیستم تحت مطالعه را در صفحه اعداد مختلط نشان می‌دهد. همانطور که انتظار می‌رود، با توجه به ابعاد ماتریس حالت، مقادیر ویژه سیستم را می‌توان در چهار مود خوشه بندی کرد. مود اول، مقادیر ویژه کاملاً حقیقی است که نزدیک نقطه صفر قرار گرفته اند. مودهای دوم و سوم مزدوج یکدیگرند و با توجه به ضریب میرایی آنها، مقادیر ویژه بحرانی سیستم به شمار می‌روند. مقادیر ویژه مود چهارم نیز کاملاً حقیقی هستند که بیشتر به سیستم تحریک وابسته می‌باشند و دورترین مقادیر ویژه نسبت به محور موهومی به شمار می‌روند. در مودهای ۲ و ۳، مقادیر ویژه مربوط به ژنراتورهای ۱، ۲ و ۳ کمترین ضریب میرایی را دارند. بررسی مجدد جدول (۲) نشان می‌دهد که در بین این سه ژنراتور نیز کمترین ضریب میرایی را ژنراتور ۳ به خود اختصاص داده است. نکته قابل توجهی که وجود دارد این است که ژنراتور ۳، بیشترین انحراف معیار را نیز به نمایش گذاشته است. بنابراین، علاوه بر کمترین حاشیه پایداری، ژنراتور ۳ بیشترین حساسیت را نیز در بین ژنراتورهای سیستم به تغییرات توان بار دارد.



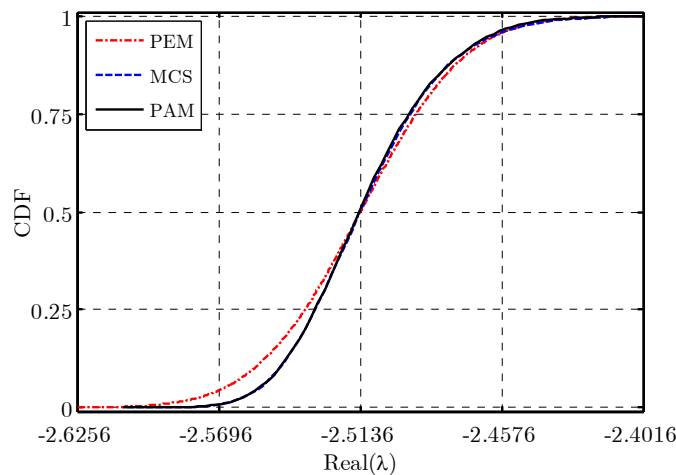
شکل ۴. نمودار مقادیر ویژه سیستم نمونه ۱۴ باس IEEE

شکل (۵)، تابع توزیع تجمعی قسمت حقیقی مقدار ویژه مود ۲ از ژنراتور سوم ( $\lambda_{2,G3}$ ) را نشان می‌دهد. همانطور که مشاهده می‌شود، نتایج روش پیشنهادی اختلاف قابل مشاهده‌ای با روش مونت کارلو ندارد و از دقت مناسبی برخوردار است. اما تابع CDF بدست آمده از روش تخمین نقطه، علی‌رغم اینکه از نظر مقدار میانگین دقت خوبی دارد، در سایر نقاط با نتایج روش پیشنهادی و مونت کارلو دارای اختلافی نامتقارن است. در حقیقت باید به این نکته اشاره کرد که بر اساس نتایج روش‌های پیشنهادی و مونت کارلو، تابع CDF قسمت حقیقی  $\lambda_{2,G3}$  دارای عدم تقارن یا چولگی<sup>۱</sup> از سمت راست است، اما روش تخمین نقطه نتوانسته است این چولگی را به درستی تقریب بزند. شکل (۶) تابع توزیع احتمال قسمت حقیقی  $\lambda_{2,G3}$  را نشان می‌دهد. این شکل بر اساس روش پیشنهادی بدست آمده است. همانطور که مشاهده می‌شود، تابع PDF نشان داده شده در شکل (۶) دارای چولگی مثبت است. مقدار این چولگی ۰/۴۴۲۱ است اما مقدار چولگی بدست آمده از روش تخمین نقطه ۰/۴۰۷۹ می‌باشد که اختلاف محسوسی با یکدیگر دارند.

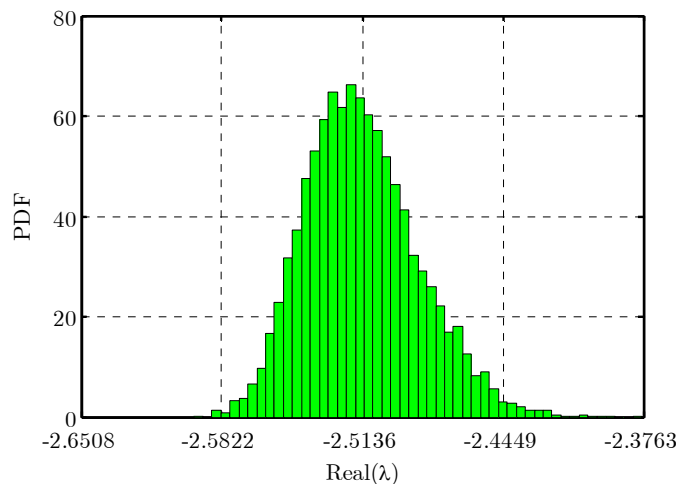
توابع توزیع تجمعی و توزیع احتمال قسمت حقیقی مقدار ویژه مود ۱ از ژنراتور سوم  $\lambda_{1,G3}$  نیز به ترتیب در شکل‌های (۷) و (۸) نشان داده شده است. همانطور که مشاهده می‌شود، نتایج حاصل از روش پیشنهادی و روش مونت کارلو، تفاوت محسوسی

<sup>۱</sup> Skewness

ندارند، اما روش تخمین نقطه باز هم نتوانسته توابع CDF و PDF قسمت حقیقی  $\lambda_{1,G3}$  را به درستی تقریب بزند. همانطور که در شکل‌های (۷) و (۸) مشاهده می‌شود، توابع CDF و PDF حاصل از روش پیشنهادی و مونت کارلو دچار چولگی منفی (به سمت چپ) شده‌اند اما در روش تخمین نقطه، این چولگی به درستی تقریب زده نشده است. نکته قابل توجه دیگر در شکل‌های (۵) و (۷) این است که توابع توزیع تجمعی بدست آمده از روش پیشنهادی، از نظر کشیدگی<sup>۱</sup> نیز کاملاً منطبق با روش مونت کارلو است، اما نتایج حاصل از روش تخمین نقطه از این دیدگاه نیز دچار خطا شده است.



شکل ۵. تابع توزیع تجمعی قسمت حقیقی مقدار ویژه مود ۲ از ژنراتور سوم

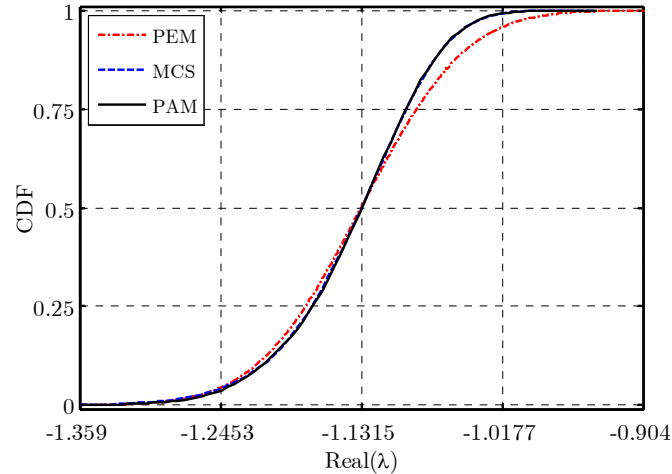


شکل ۶. تابع توزیع احتمال قسمت حقیقی مقدار ویژه مود ۲ از ژنراتور سوم

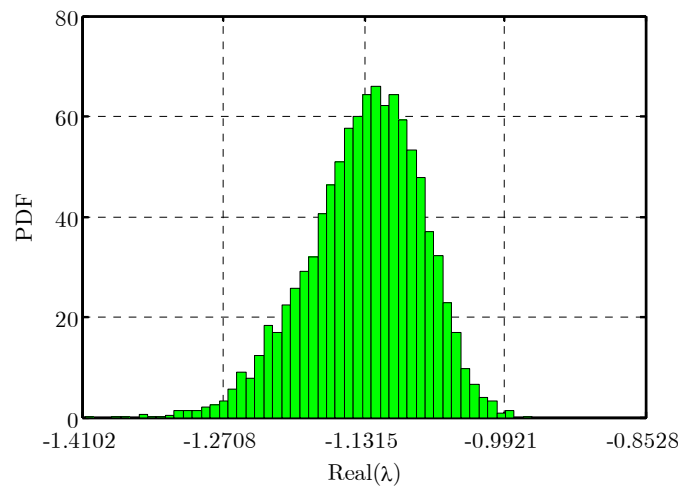
بررسی نتایج حاصل از روش پیشنهادی و مقایسه آنها با روش مونت کارلو، بعنوان یک روش مرجع، نشان می‌دهد که روش پیشنهادی علاوه بر سرعت مناسب، از دقت قابل توجهی نیز در تحلیل پایداری سیگنال کوچک سیستم‌های قدرت برخوردار است. نکته مهمی که وجود دارد این است که روش پیشنهادی نه تنها میانگین و انحراف معیار متغیرهای خروجی را نتوانسته است به

<sup>1</sup> Kurtosis

درستی تخمین بزند، بلکه توابع CDF و PDF متغیرهای احتمالاتی مورد نظر را نیز با دقت بالا تقریب زده است، بطوری که حتی ویژگی‌های کیفی این توابع مانند چولگی و کشیدگی نیز دقیقاً به درستی تقریب زده شده است.



شکل ۷. تابع توزیع تجمعی قسمت حقیقی مقدار ویژه مود یک از ژنراتور سوم



شکل ۸. تابع توزیع احتمال قسمت حقیقی مقدار ویژه مود یک از ژنراتور سوم

## ۵- نتیجه‌گیری

در این مقاله روشی جدید برای بررسی احتمالاتی پایداری سیگنال کوچک ژنراتور سنکرون ارائه شده است. در روش پیشنهادی، معادلات حاکم بر سیستم‌های قدرت بر مبنای یک چندجمله‌ای هرمیت مدل‌سازی می‌شود بطوری که به جای حل معادلات مذکور، از چند جمله‌ای پیشنهادی برای محاسبه نتایج پخش بار و محاسبه ماتریس حالت سیستم استفاده می‌شود. بمنظور بررسی احتمالاتی پایداری سیگنال کوچک با استفاده از روش تقریب چند جمله‌ای، ابتدا لازم است ضرایب چندجمله‌ای با استفاده از محاسبات قطعی به ازای تعدادی نقطه نمونه تعیین شود. از آنجا که تعیین صحیح ضرایب چندجمله‌ای اثر مستقیمی بر دقت این روش دارد، انتخاب نقاط نمونه از اهمیت بالایی برخوردار است. در این مقاله، روش جدیدی برای تعیین نقاط نمونه ارائه شده است

که علاوه بر دقت بالا، امکان استفاده از روش تقریب چند جمله ای را نیز به ازای هر تعداد از متغیرهای تصادفی ورودی فراهم می‌کند. بمنظور بررسی صحت و کارایی روش پیشنهادی، سیستم ۱۴ باس IEEE در نرم افزار MATLAB مورد شبیه سازی قرار گرفته است و تمامی بارهای آن بعنوان متغیرهای تصادفی مدل سازی شده اند. نتایج به دست آمده از شبیه سازی روش پیشنهادی و مقایسه آن با روش مونت کارلو و روش تخمین نقطه نشان می دهد که روش پیشنهادی نه تنها توانسته است میانگین و انحراف معیار، بلکه توابع توزیع احتمال مقادیر ویژه سیستم نیز با دقت بسیار بالا تخمین بزند، بطوری که ویژگی های توابع مذکور، از جمله کشیدگی و چولگی نیز، از دقت بالایی برخوردارند. سهولت استفاده، سرعت تحلیل بالا، تعداد محاسبات کمتر، دقت نتایج و کارآمدی روش پیشنهادی در تجزیه و تحلیل احتمالاتی پایداری سیگنال کوچک سیستم های قدرت بویژه هنگامی که تعداد متغیرهای تصادفی ورودی قابل توجه باشد، از جمله مزیت هایی است که این روش به نمایش گذاشته است.



- [1] Hasan, Kazi Nazmul, Robin Preece, and Jovica V. Milanović. "Priority ranking of critical uncertainties affecting small-disturbance stability using sensitivity analysis techniques." *IEEE Transactions on Power Systems* 32.4 (2016): 2629-2639.
- [2] Jordehi, A. Rezaee. "How to deal with uncertainties in electric power systems? A review." *Renewable and Sustainable Energy Reviews* 96 (2018): 145-155.
- [3] Aien, Morteza, Ali Hajebrahimi, and Mahmud Fotuhi-Firuzabad. "A comprehensive review on uncertainty modeling techniques in power system studies." *Renewable and Sustainable Energy Reviews* 57 (2016): 1077-1089.
- [4] Zubo, Rana HA, et al. "Operation and planning of distribution networks with integration of renewable distributed generators considering uncertainties: A review." *Renewable and Sustainable Energy Reviews* Volume 72, (2017).
- [5] Xie, Z. Q., et al. "Quasi-Monte Carlo based probabilistic optimal power flow considering the correlation of wind speeds using copula function." *IEEE Transactions on Power Systems* Volume 33, (2017): 2239-2247.
- [6] Yu, Le, Shan Gao, and Yu Liu. "Pseudo-sequential Monte Carlo simulation for distribution network analysis with distributed energy resources." 2015 5th International Conference on Electric Utility Deregulation and Restructuring and Power Technologies (DRPT). IEEE, (2015).
- [7] Liu, Jiayu, et al. "Power system stochastic transient stability assessment based on Monte Carlo simulation." *The Journal of Engineering*, Volume 16, (2019): 1051-1055.
- [8] Xu, Xiaoyuan, and Zheng Yan. "Probabilistic load flow calculation with quasi-Monte Carlo and multiple linear regression." *International Journal of Electrical Power & Energy Systems* Volume 88, (2017): 1-12.
- [9] Kloubert, Marie-Louise, and Christian Rehtanz. "Enhancement to the combination of point estimate method and Gram-Charlier Expansion method for probabilistic load flow computations." In 2017 IEEE Manchester PowerTech, pp. 1-6. IEEE, 2017.
- [10] Xiao, Qing, Ying He, Kuineng Chen, Yang Yang, and Yonghui Lu. "Point estimate method based on univariate dimension reduction model for probabilistic power flow computation." *IET Generation, Transmission & Distribution* 11, no. 14 (2017): 3522-3531.
- [11] Che, Yulong, Xiaoru Wang, Xiaoqin Lv, and Yi Hu. "Probabilistic load flow using improved three point estimate method." *International Journal of Electrical Power & Energy Systems* 117 (2020): 105618.
- [12] B. R. Prusty, D. Jena, "A critical review on probabilistic load flow studies in uncertainty constrained power systems with photovoltaic generation and a new approach," *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, vol. 69, pp. 1286-1302, 2017.
- [13] Gurung, Samundra, Sumate Naetiladdanon, and Anawach Sangswang. "Impact of photovoltaic penetration on small signal stability considering uncertainties." 2017 IEEE Innovative Smart Grid Technologies-Asia (ISGT-Asia). IEEE, (2017).
- [14] Z. W. Wang, C. Shen and F. Liu, "Probabilistic Analysis of Small Signal Stability for Power Systems With High Penetration of Wind Generation," in *IEEE Transactions on Sustainable Energy*, vol. 7, no. 3, (2016): 1182-1193.
- [15] Zou, Bin, and Qing Xiao. "Probabilistic load flow computation using univariate dimension reduction method." *International Transactions on Electrical Energy Systems* 24, no. 12, (2014): 1700-1714.

- [16] Kolassa, John E. Series approximation methods in statistics. Vol. 88. Springer Science & Business Media, 2006.
- [17] Gruosso, Giambattista, et al. "Probabilistic load flow methodology for distribution networks including loads uncertainty." *International Journal of Electrical Power & Energy Systems* Volume 106, )2019(: 392-400.
- [18] Gruosso, Giambattista, et al. "Uncertainty-Aware Computational Tools for Power Distribution Networks Including Electrical Vehicle Charging and Load Profiles." *IEEE Access* Volume 7, )2019(: 9357-9367
- [19] Xu, Yijun, Lamine Mili, and Junbo Zhao. "Probabilistic Power Flow Calculation and Variance Analysis based on Hierarchical Adaptive Polynomial Chaos-ANOVA Method." *IEEE Transactions on Power Systems* (2019).
- [20] Xu, Yijun, Lamine Mili, Adrian Sandu, Michael R. von Spakovsky, and Junbo Zhao. "Propagating uncertainty in power system dynamic simulations using polynomial chaos." *IEEE Transactions on Power Systems* 34, no. 1 (2018): 338-348.
- [21] Wang, Guanzhong, Huanhai Xin, Di Wu, and Ping Ju. "Data-driven probabilistic small signal stability analysis for grid-connected PV systems." *International Journal of Electrical Power & Energy Systems* 113 (2019): 824-831.
- [22] Qiu, Yiwei, Hao Wu, Yongzhi Zhou, and Yonghua Song. "Global parametric polynomial approximation of static voltage stability region boundaries." *IEEE Transactions on Power Systems* 32, no. 3 (2016): 2362-2371.
- [23] Ren, Zhouyang, Wenyuan Li, Roy Billinton, and Wei Yan. "Probabilistic power flow analysis based on the stochastic response surface method." *IEEE Transactions on Power Systems* 31, no. 3 (2015): 2307-2315.
- [24] Zhou, Yichen, Yonggang Li, Weidong Liu, Deshui Yu, Zhechao Li, and Jiaomin Liu. "The stochastic response surface method for small-signal stability study of power system with probabilistic uncertainties in correlated photovoltaic and loads." *IEEE Transactions on Power Systems* 32, no. 6 (2017): 4551-4559.
- [25] Shen, Danfeng, Hao Wu, Bingqing Xia, and Deqiang Gan. "Polynomial Chaos Expansion for Parametric Problems in Engineering Systems: A Review." *IEEE Systems Journal* (2020).
- [26] Sauer, P., M. A. Pai, and Joe H. Chow. *Power system dynamics and stability*. Wiley IEEE Press, New Jersey, 2017.
- [27] Yang, Yandong, Shufang Li, Wenqi Li, and Meijun Qu. "Power load probability density forecasting using Gaussian process quantile regression." *Applied Energy* 213 (2018): 499-509.
- [28] Jiang, Shui-Hua, Dian-Qing Li, and Chuang-Bing Zhou. "Optimal probabilistic collocation points for stochastic response surface method." *Chinese Journal of Computational Mechanics* 29, no. 3 (2012): 345-351.
- [29] Kodsí, Sameh Kamel Mena, and Claudio A. Canizares. "Modeling and simulation of IEEE 14-bus system with FACTS controllers." University of Waterloo, Canada, Tech. Rep (2003).