نشریه سامانه های غیرخطی در مهندسی برق
دوره ۱، شماره ۲، پاییز ۱۳۹۲
JNSEE سامانه های غیر خطی در مهندسی برق
دانشگاه صنعتی سهند

بهبود عملکرد تعقیب مسیر کنترل تطبیقی مدل مرجع فیدبک خروجی مقاوم برای کلاسی از سیستم‌های پیوسته‌ی خطی با تاخیرهای حالت متغیر با زمان نامعین

فرناز قنبرپور[۱] و سحرانه قائمی[۲]

[۱] فارغ‌التحصیل کارشناسی ارشد دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر، دانشگاه تبریز، farnazghanbarpour@yahoo.com

[۲] **نویسنده مسئول**، استادیار دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر، دانشگاه تبریز، ghaemi@tabrizu.ac.ir

(تاریخ دریافت: ۱۳۹۲/۴/۱۹ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۲/۶/۱۳)

چکیده: در این مقاله روشی برای طراحی کنترل‌کننده در چارچوب کنترل تطبیقی مدل مرجع و فیدبک خروجی تطبیقی، با استفاده از تابعی از خطای تعقیب مسیر و کنترل تناسبی برای دسته‌ای از سیستم‌های خطی پیوسته با تاخیرهای متعدد متغیر با زمان در حالت، ارائه شده است. کنترل‌کننده پیشنهادی علاوه بر این که نسبت به تاخیرهای نامعین، متعدد و متغیر با زمان فرایند و اغتشاش خارجی با کران‌های نامعین مقاوم است، تاثیر قابل ملاحظه‌ای در بهبود رفتار حالت دائم و عملکرد گذرای سیستم حلقه بسته دارد. اثبات پایداری سیستم حلقه بسته و همگرایی خطا، با استفاده از تابع لیاپانوف-کراسفسکی مناسبی صورت گرفته است. نتایج شبیه‌سازی، نشان‌دهنده‌ی کارایی کنترل‌کننده‌ی پیشنهادی می‌باشد.

کلمات کلیدی: کنترل تطبیقی، سیستم‌های با تاخیر زمانی، عملکرد گذرا و حالت دائم

۱- مقدمه

سیستم‌های با تاخیر زمانی به عنوان دسته‌ی مهمی از سیستم‌ها در فرایندهای شیمیایی، آیرودینامیک و شبکه‌های ارتباطی حضور دارند. تاخیر زمانی می‌تواند یک منبع مهم ناپایداری و عملکرد ضعیف باشد. از طرفی پارامترهای سیستم در بسیاری از فرایندهای دینامیک، بنابر دلایلی از جمله خطاهای مدل‌سازی و تقریب‌های خطی‌سازی نامعلوم هستند. بنابراین تلاش‌های بسیاری برای کنترل سیستم‌های نامعین دارای تاخیر انجام گرفته‌است. در مرجع [۱]، کنترل‌کننده‌ی فیدبک حالت مقاوم تطبیقی پیوسته، برای دسته‌ای از سیستم‌های دینامیکی، با تاخیرهای متعدد متغیر با زمان درحالت و پارامترهای نامعین متغیر با زمان و اغتشاشات خارجی، ارائه شده‌است. در مرجع [۲]، کنترل‌کننده‌ای بر اساس نظریه‌ی لیاپانوف و روش نامساوی ماتریسی خطی، برای دسته‌ای از سیستم‌های به هم پیوسته، ارائه شده است که یک بخش آن، کنترل‌کننده‌ی فیدبک حالت خطی است که سیستم را پایدار می‌کند و بخش دیگر، کنترل‌کننده‌ی تطبیقی است که با تخمین پارامترهای نامعلوم غیرخطی، برای جبران بخش غیرخطی سیستم، بکار می‌رود. در مرجع [۳]،کنترل تطبیقی فیدبک خروجی برای دسته‌ای از سیستم‌های خطی با نامعینی و تاخیرهای متعدد متغیر با زمان در حالت، مورد مطالعه قرار گرفته است. برای بررسی پایداری، فرم خاصی از تابع لیاپانوف-کراسفسکی[۱] که شامل جمله‌ای با بهره‌ی تطبیق مجازی خاص است، مورد استفاده قرار گرفته است. در مرجع [۴]، یک مسئله‌ی مشابه مرجع [۳]، بررسی شده است، با این تفاوت که مرجع [۴]، برای دسته‌ی بزرگتری از سیستم‌ها با بخش‌های غیرخطی تاخیردار نامعین، مطرح شده و در آن، از بکار بردن سیگنال کنترل

ناپیوسته اجتناب شده است و برای تطبیق از نوعی الگوریتم تاخیر زمانی-انتگرالی-تناسبی استفاده شده است که نسبت به روش‌های انتگرالی-تناسبی و انتگرالی کلاسیک، عملکرد تطبیق گذرای بهتری دارد. در مرجع [۵]،کنترل‌کننده‌ی تطبیقی جدیدی بر اساس روش هم ارزی قطعیت، با ترکیب قانون کنترل بازگشت به عقب و قانون تطبیق نرمالیزه شده، توسعه داده شده است. کنترل‌کننده‌ی تطبیقی جدید، پایداری، عملکرد خوب و همچنین مقاومت پارامتری بالایی را برای کنترل‌کننده، بدون استفاده از جملات غیرخطی با مرتبه‌ی بالا تضمین می‌کند. مرجع [۶]،کنترل‌کننده‌ی تطبیقی جدیدی را ارائه می‌کند که به سرعت تطبیق شده و پاسخ گذرای به طور یکنواخت کراندار را برای سیگنال‌های ورودی و خروجی سیستم تضمین می‌کند. از آنجایی که کنترل‌کننده در این روش از حالت‌های سیستم نیز استفاده می‌کند، در این روش از پیش‌بین حالت استفاده شده است.

با توجه به این‌که پدیده‌ی وزوز[۲] در سیستم‌های واقعی به علت مولفه‌ی کنترلی ناپیوسته سبب محدودیت بسیاری در بکارگیری کنترل‌کننده‌ها می‌باشد، در این مقاله، در ابتدا روش بکار رفته در مرجع [۴]، برای پیوسته کردن مولفه‌ی کنترلی، به روش مرجع [۳]، اعمال می‌گردد تا سیگنال کنترلی مرجع [۳]، پیوسته گردد. در مرجع [۷]، برای سیستم‌های نامعین بدون تاخیر و اغتشاش، و با درجه‌ی نسبی یک، روشی دیگر برای بهنگام‌سازی پارامترها در کنترل تطبیقی مدل مرجع استاندارد، ارائه شده است که منجر به بهبود عملکرد تعقیب مسیر می‌گردد که این روش، استفاده از تابعی پیوسته از خطا، به جای سیگنال خطا، در قانون بهنگام‌سازی پارامترهاست. نتیجه‌ی تعمیم روش بکار رفته در این مرجع، به فرایند با تاخیر و اغتشاش تحت بررسی، افزودن مولفه‌ای دیگر به کنترل‌کننده‌ی پیوسته‌ای که از ترکیب کنترل‌کننده‌های دو مرجع [۳] و [۴]، حاصل شده است، می‌باشد که این مولفه، با استفاده از یک قانون بهنگام‌سازی، تطبیق می‌شود. در کاربردها عملکرد گذرای سیستم نیز، اغلب مهم است. شبیه‌سازی‌های بسیاری نشان می‌دهند که پاسخ گذرای سیستم‌های تطبیقی ممکن است به دلیل نوسانات اولیه‌ی بزرگ، غیر قابل قبول باشد. برای بهبود رفتار حالت گذرای سیستم حلقه بسته، یک مولفه‌ی کنترلی تناسبی به کنترل‌کننده اضافه می‌گردد که تاثیر قابل توجهی در بهبود حالت گذرای سیستم حلقه بسته خواهد داشت.

۲-بیان مسئله

سیستم نامعین خطی ثابت در زمان و پیوسته، با تاخیرهای متعدد متغیر با زمان و اغتشاش بیان شده توسط رابطه‌ی (۱) را در نظر بگیرید:

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+\sum_{j=1}^{M}A_{\tau_j}x\left(t-\tau_j(t)\right)+bu(t)+bd(t),\quad x(\vartheta)=x_0,\quad \vartheta\epsilon[-\tau_{\max},0],\qquad y(t)=c^Tx(t) \tag{۱}$$

که در آن $x(t)\,\epsilon\,R^n$، $u(t)\,\epsilon\,R$، $y(t)\,\epsilon\,R$ و $d(t)\,\epsilon\,R$ به ترتیب عبارتند از بردار حالت، ورودی کنترل، خروجی و اغتشاش خارجی. ماتریس‌های ثابت A و A_{τ_j} و بردارهای b و c دارای ابعاد مناسب و المان‌های نامعلوم هستند. تاخیرهای زمانی $\tau_j(t)$ توابع مشتق‌پذیر نامنفی هستند که در رابطه‌ی (۲) صدق می‌کنند:

$$0\le \tau\_j\ (t)\le \tau\_(j\ max)\le \tau\_\max\ ,\qquad \dot{\tau}_{\mathrm{j}}(t)\le\tau_{\mathrm{j}}^*\le\tau^*<1 \tag{۲}$$

که در آن $\tau_{j\,max}$ و τ_{j}^*(j=1,..., M) ، τ_{max} و τ^* تعدادی ثابت مثبت نامعلوم هستند. بنابراین تاخیرهای زمانی نامعین بوده و کران‌های بالای نامعلوم دارند. هدف این است که همه‌ی سیگنال‌های حلقه بسته محدود بمانند و خروجی فرایند $y(t)$، به طور مجانبی و دقیق $y_r(t)$ خروجی مدل مرجع پایدار بدون تاخیر (۳) را تعقیب کند:

[DOR: 20.1001.1.23223146.1392.1.2.6.4]

$$\dot{x}_r(t) = A_r x_r(t) + b_r r(t)$$
$$y_r(t) = c_r^T x_r(t) \quad (۳)$$

که در آن $x_r \in R^n$، $y_r \in R$ و $r(t) \in R$ به ترتیب بردار حالت، خروجی و ورودی مدل مرجع است که در آن ورودی مرجع، تابع زمانی به طور یکنواخت کراندار و به طور تکه‌ای پیوسته می‌باشد. تابع تبدیل مدل مرجع $W_r(s)$، به صورت رابطه‌ی (۴) بیان می‌شود:

$$W_r(s) = c_r^T (sI_n - A_r)^{-1} b_r = k_r \frac{N_r(s)}{D_r(s)} \quad (۴)$$

که در آن $N_r(s)$ و $D_r(s)$ چند جمله‌ای‌های تکین و k_r، ثابت مثبتی است. تعقیب مسیر مجانبی به این معناست که: $\lim_{t\to\infty} e(t) = 0$ و $e(t) = y(t) - y_r(t)$ است.

فرضیات در نظر گرفته شده برای فرایند (۱) و مدل مرجع (۳) عبارت است از:

فرض ۱) وقتی که تاخیر حالت و اغتشاش خارجی نباشد فرایند (۱) به شکل رابطه‌ی (۵) قابل بیان است:

$$y = W_o(s)u, \qquad W_o(s) = c^T (sI - A)^{-1} b = k_p \frac{N(s)}{D(s)} \quad (۵)$$

که در آن $W_o(s)$، تابع تبدیل فرایند بدون تاخیر و اغتشاش است؛ $D(s)$ چندجمله‌ای تکین از درجه‌ی n است و $N(s)$ چندجمله‌ای تکین و هورویتز از درجه‌ی n-1، به عبارت دیگر فرایند مینیمم فاز است و بهره‌ی فرکانس بالای فرایند، k_p ثابت است و علامت آن معلوم است.

فرض ۲) $|d(t)| \le d^*$ که d^* نامعلوم است.

فرض ۳) $A_{\tau j} = b a_{\tau j}^{*T}$ که این فرض، فرض برقراری شرط انطباق است و در آن $a_{\tau j}^* \in R^n$، یک بردار ناشناخته است.

فرض ۴) $W_r(s) = k_r \frac{1}{s+a_r}$ که a_r ثابت مثبتی است.

۳-پارامتریزه کردن معادله‌ی خطا

با فرض معلوم بودن همه‌ی پارامترهای فرایند (۱)، u^*، به عنوان کنترل انطباقی استاندارد [۸]، برای فرایند بدون تاخیر و اغتشاش خارجی (۵)، به صورت رابطه‌ی (۶) تعریف می‌شود:

$$u^*(t) = \theta_e^* y(t) + \theta_1^{*T} x_1(t) + \theta_2^{*T} x_2(t) + \theta_r^* r(t) \quad (۶)$$

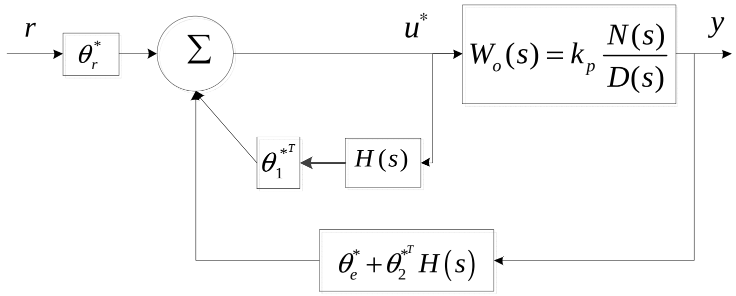
که در آن:

$$x_1 = H(s)[u^*], \qquad x_1 \in \boldsymbol{R}^{n-1} \quad (۷)$$

$$x_2 = H(s)[y], \qquad x_2 \in \boldsymbol{R}^{n-1} \quad (۸)$$

$$H(s) = \frac{\left[s^{n-2} \quad \ldots \; s \; 1\right]^T}{\lambda(s)}, \qquad H(s) \in \boldsymbol{R}^{n-1} \quad (۹)$$

و $\theta_e^*, \theta_r^* \epsilon \boldsymbol{R}$، $\theta_1^*, \theta_2^* \epsilon R^{n-1}$ و $\lambda(s)=s^{n-1}+\ldots+\lambda_1 s+\lambda_0$ چندجمله‌ای تکین و هورویتز است که جهت برقراری شرط انطباق، لازم است چندجمله‌ای $\lambda(s)$، صفرهای تابع تبدیل مدل مرجع $W_r(s)$ را شامل شود. در واقع کنترل انطباقی استاندارد، کنترل‌کننده‌ای است که با استفاده از آن، سیستم حلقه بسته بر سیستم مدل مرجع منطبق می‌گردد. با تعریف $\lambda(s)$، $H(s)$ و $W_o(s)$ از رابطه‌ی (۵)، θ_e^*، θ_1^*, θ_2^* و $\theta_r^*=k_r k_p^{-1}$ وجود خواهند داشت [۸]، به طوری که، با استفاده از کنترل‌کننده‌ی u^*، تابع تبدیل فرایند بدون تاخیر و اغتشاش $W_o(s)$، بر تابع تبدیل مدل مرجع، $W_r(s)$، منطبق می‌شود و با برقراری این انطباق، تابع تبدیل، از ورودی مرجع به خروجی فرایند، با تابع تبدیل، از ورودی مرجع به خروجی مرجع، یکسان خواهد شد. با توجه به شکل (۱)، تابع تبدیل سیستم حلقه بسته، از ورودی مرجع به خروجی فرایند، که برابر تابع تبدیل مدل مرجع است، عبارت است از:



شکل ۱: ساختار روش کنترل مدل مرجع

$$\frac{W_o(s)\left[\dfrac{1}{1-\theta_1^{*T}H(s)}\right]}{1-(\theta_e^*+\theta_2^{*T}H(s))W_o(s)\left[\dfrac{1}{1-\theta_1^{*T}H(s)}\right]}\times\theta_r^*=W_r(s)$$

که با انجام کمی عملیات ریاضی، از رابطه‌ی تابع تبدیل سیستم حلقه بسته، می‌توان به رابطه‌ی (۱۰)، دست یافت:

$$\theta_r^* W_r^{-1}(s)W_o(s)=1-\theta_1^{*T}H(s)-\theta_2^{*T}H(s)W_o(s)-\theta_e^* W_o(s) \qquad (۱۰)$$

با اعمال رابطه‌ی (۶) به فرایند واقعی (۱) و سپس از روابط (۱) و (۱۰) و برای هر u، خطای تعقیب مسیر، $e=y-y_r$ برابر است با:

$$e=W_r(s)\rho^*[u-\theta_e^* y-\theta_1^{*T}x_1-\theta_2^{*T}x_2-\theta_r^* r+\left(1-\theta_1^{*T}H(s)\right)d(t)+\sum_{j=1}^{M}a_{\tau j}^{*T}x\left(t-\tau_j(t)\right)- \qquad (۱۱)$$
$$\sum_{j=1}^{M}\theta_1^{*T}H(s)a_{\tau j}^{*T}x\left(t-\tau_j(t)\right)]$$

که $\rho^*=\theta_r^{*^{-1}}=k_p k_r^{-1}$.

برای دست یافتن به معادله‌ی خطای مناسب، جمله‌ی آخر (۱۱) تغییر داده می‌شود. در ابتدا سیستم دینامیکی جدیدی، مطابق مرجع [۳]، به شکل رابطه‌ی (۱۲) معرفی می‌شود:

$$z(t)=\sum_{j=1}^{M}\theta_1^{*T}H(s)\left[a_{\tau j}^{*T}x\left(t-\tau_j(t)\right)\right]=\sum_{j=1}^{M}\theta_{zj}^{*T}z_{xj}(t) \qquad (۱۲)$$

که در آن

$$\theta_{zj}^{*T}=\left[\theta_{11}^* a_{\tau j}^{*T},\theta_{12}^* a_{\tau j}^{*T},\ldots,\theta_{1(n-1)}^* a_{\tau j}^{*T}\right]$$ و

$$z_{xj}(t) = H_n(s)\left[x\left(t-\tau_j(t)\right)\right] \tag{۱۳}$$

$$H_n(s) = \frac{\left[I_{n\times n}s^{n-2}\ ,\ \ldots\ ,\ I_{n\times n}s\ ,\ I_{n\times n}\right]^T}{\lambda(s)} \tag{۱۴}$$

که $H_n(s)\ \epsilon\ \boldsymbol{R}^{n(n-1)\times n}$، $z_x\ \epsilon\ \boldsymbol{R}^{n(n-1)}$، $\theta_z^*\ \epsilon\ \boldsymbol{R}^{n(n-1)}$ و $I_{n\times n}$ ماتریس همانی $n\times n$ است.

سپس سیگنال‌های $z_{xj}(t)$ در رابطه‌ی(۱۳)، به دو مولفه تجزیه می‌شود:

$$z_{xj}(t) = z_{ej}(t) + z_{rj}(t)$$

که در آن

$$\begin{aligned} z_{ej}(t) &= H_n(s)\left[e_x\left(t-\tau_j(t)\right)\right],\\ z_{rj}(t) &= H_n(s)\left[x_r\left(t-\tau_j(t)\right)\right],\\ e_x\left(t-\tau_j(t)\right) &= x\left(t-\tau_j(t)\right) - x_r\left(t-\tau_j(t)\right) \end{aligned} \tag{۱۵}$$

که $x_r(t)\ \epsilon\ \boldsymbol{R}^n$ حالت مدل مرجع (۳) با فضای حالت $(A_r\ ,b_r\ ,c_r)$ می‌باشد.

سپس با استفاده از روابط (۱۲) و (۱۵)، از رابطه‌ی (۱۱)، معادله‌ی خطای اصلی بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} e = W_r(s)\rho^*[u &- \theta_e^* e(t) - \theta_1^{*T} x_1(t) - \theta_2^{*T} x_2(t) - \theta_r^* r(t) - \theta_e^* y_r(t) + \left(1-\theta_1^{*T} H(s)\right)[d(t)]\\ &+ \sum_{j=1}^{M} a_{\tau j}^{*T} x_r\left(t-\tau_j(t)\right) + \sum_{j=1}^{M} a_{\tau j}^{*T} e_x\left(t-\tau_j(t)\right) - \sum_{j=1}^{M}\theta_{zj}^{*T} z_{rj}(t) - \sum_{j=1}^{M}\theta_{zj}^{*T} z_{ej}(t)] \end{aligned} \tag{۱۶}$$

تذکر ۱) $e_x\left(t-\tau_j(t)\right)$ و $z_{ej}(t)$ برای اندازه‌گیری در دسترس نیستند و فقط برای آنالیز هستند و در پیاده سازی بکار نمی‌روند.

٤-ساختار کنترل‌کننده‌ی پیشنهادی

ساختار کنترل‌کننده‌ی پیشنهادی، به شکل رابطه‌ی (۱۷)، است:

$$u(t) = \theta^T(t)\,\omega(t) - k_I\,\mathrm{sgn}\left(k_p\right)\int_0^t f\left(e(t)\right)dt - \tilde{k}(t)\,f\left(e(t)\right) - \frac{1}{\sigma}e(t) \tag{۱۷}$$

که بهره‌ی تطبیق، یعنی $\theta(t)$ برابر است با: $\theta(t) = [\theta_e(t)\theta_1^T(t)\theta_2^T(t)]^T\epsilon\ \boldsymbol{R}^{2n-1}$ و بردار رگرسور برابر $\omega(t) = [e(t)x_1^T(t)x_2^T(t)]^T\epsilon\ \boldsymbol{R}^{2n-1}$ است. پارامترهای طراحی k_I و σ، مقادیر ثابتی هستند. مطابق مرجع [۷]، تابع $f\left(e(t)\right)$ به شکل رابطه‌ی(۱۸)، تعریف می‌شود:

$$f\left(e(t)\right) = \begin{cases} \left(e(t)\right)^\alpha & e(t) \geq 0\\ -\left(-e(t)\right)^\alpha & e(t) < 0 \end{cases} \tag{۱۸}$$

که α ثابت طراحی است و $0 < \alpha < 1$.

مولفه‌ی اول کنترل‌کننده‌ی (۱۷)، $\theta^T(t)\omega(t)$، نسخه‌ی کنترل تطبیقی انطباق مدل کلاسیک کنترل‌کننده‌ی رابطه‌ی (۶)، است که به طور گسترده‌ای در کنترل تطبیقی مدل مرجع، برای فرایندهای بدون تاخیر، بکار رفته است؛ با این تغییر که در کنترل‌کننده‌ی (۱۷)، در بردار رگرسور $\omega(t)$، از سیگنال خطا، $e(t)$، به جای سیگنال خروجی فرایند، $y(t)$، استفاده شده است و جمله‌ی

پیش‌خورد قابل تنظیم $\theta_r r(t)$، حذف شده است. بنابراین بعد بردار بهره‌ی تطبیق $\theta(t)$، در مولفه‌ی اول کنترل‌کننده‌ی (۱۷)، از بعد بردار بهره‌ی تطبیق متناظر، در کنترل تطبیقی مدل مرجع کلاسیک برای فرایندهای بدون تاخیر، کمتر است و در نتیجه، بار محاسباتی برای بهنگام کردن بردار بهره کمتر خواهد بود.

مولفه‌ی دوم کنترل‌کننده‌ی (۱۷)، $-k_I sgn(k_p)\int_0^t f(e(t))dt$، برای دستیابی به ویژگی مقاوم بودن نسبت به تاخیرهای متغیر با زمان فرایند و اغتشاش خارجی با کران‌های نامعلوم، استفاده می‌شود.

در مرجع [۷]، برای سیستم‌های نامعین بدون تاخیر و اغتشاش، و با درجه‌ی نسبی یک، روشی دیگر برای الگوریتم تطبیق یا همان بهنگام‌سازی پارامترها در کنترل تطبیقی مدل مرجع استاندارد، ارائه شده است که منجر به بهبود عملکرد تعقیب مسیر و خطای بین خروجی سیستم و خروجی مدل مرجع، می‌گردد که این روش، استفاده از تابع $f(e(t))$، که تابعی پیوسته از خطاست، به جای استفاده از سیگنال خطا، $e(t)$، در قانون بهنگام‌سازی پارامترهاست. نتیجه‌ی تعمیم دادن روش بکار رفته در این مرجع، برای بهنگام‌سازی پارامترها، به فرایند با تاخیر و اغتشاش (۱)، معرفی مولفه‌ی سوم کنترل‌کننده‌ی (۱۷)، $-\tilde{k}(t)f(e(t))$، است که با استفاده از یک قانون بهنگام‌سازی، تطبیق می‌شود. برای بهبود رفتار حالت گذرای سیستم حلقه بسته، مولفه‌ی کنترلی تناسبی، $-\frac{1}{\sigma}e(t)$، به عنوان مولفه‌ی چهارم کنترل‌کننده‌ی (۱۷)، معرفی می‌گردد که تاثیر قابل توجهی در بهبود حالت گذرای سیستم حلقه بسته دارد.

۵- الگوریتم تطبیق و پایداری

با تعریف خطای پارامتر $\tilde{\theta}(t)$ و با استفاده از کنترل تطبیقی (۱۷)، معادله‌ی خطای تعقیب مسیر اصلی (۱۶)، به شکل رابطه‌ی (۱۹)، قابل بیان است:

$$\begin{aligned} e = {} & W_r(s)\rho^*[\tilde{\theta}^T(t)\omega(t) - k_I\,\mathrm{sgn}(k_p)\int_0^t f(e(t))dt - \tilde{k}(t)f(e(t)) - \frac{1}{\sigma}e(t) - \theta_r^* r(t) - \theta_e^* y_r(t) + \\ & \left(1-\theta_1^{*^T}H(s)\right)[d(t)] + \sum_{j=1}^{M} a_{\tau j}^{*^T} x_r\left(t-\tau_j(t)\right) - \sum_{j=1}^{M}\theta_{zj}^{*^T} z_{rj}(t) - \sum_{j=1}^{M}\theta_{zj}^{*^T} z_{ej}(t) + \sum_{j=1}^{M} a_{\tau j}^{*^T} e_x\left(t-\tau_j(t)\right)] \end{aligned} \quad (۱۹)$$

که خطای پارامتر $\tilde{\theta}(t)$ عبارت است از: $\tilde{\theta}(t) = \theta(t) - \theta^*$ و $\theta^* = \left[\theta_e^*\ \theta_1^{*^T}\theta_2^{*^T}\right]$.

برای طراحی مکانیزم بهنگام‌سازی پارامترها، از روش متداول در کنترل تطبیقی مدل مرجع برای سیستم‌های بدون تاخیر استفاده می‌شود. بردار افزوده‌ی $\hat{x}(t) = [x\ x_1\ x_2]^T$ معرفی می‌شود و حالت تحقق غیر مینیمال $\hat{c}^T(sI-\hat{A})^{-1}\hat{b}\theta_r^*$ از W_r، با $\hat{x}_r(t)$ مشخص می‌شود. بنابراین می‌توان نمایش فضای حالت (۲۰) را برای رابطه‌ی (۱۹) نوشت:

[DOR: 20.1001.1.23223146.1392.1.2.6.4]

$$\frac{d\hat{e}(t)}{dt}=\hat{A}\hat{e}(t)+\bar{b}\rho^{*}\{\tilde{\theta}^{T}(t)\omega(t)-\tilde{k}(t)f(e(t))-\frac{1}{\sigma}e(t)-\theta_{r}^{*}r(t)-\theta_{e}^{*}y_{r}(t)-$$
$$k_{I}\operatorname{sgn}(k_{p})\int_{0}^{t}f(e(t))dt+\left(1-\theta_{1}^{*^{T}}H(s)\right)[d(t)]+\sum_{j=1}^{M}a_{\tau j}^{*^{T}}e_{x}(t-\tau_{j}(t))+$$
$$\sum_{j=1}^{M}a_{\tau j}^{*^{T}}x_{r}(t-\tau_{j}(t))-\sum_{j=1}^{M}\theta_{zj}^{*^{T}}C_{e}\hat{z}_{ej}(t)+\sum_{j=1}^{M}\theta_{zj}^{*^{T}}H_{n}(s)\left[x_{r}(t-\tau_{j}(t))\right]\}$$

$$\frac{d\hat{z}_{ej}(t)}{dt}=A_{e}\hat{z}_{ej}(t)+B_{e}e_{x}(t-\tau_{j}(t))$$
$$z_{ej}=C_{e}\hat{z}_{ej}(t)$$
$$e(t)=y(t)-y_{r}(t)=\hat{c}^{T}\hat{e}(t),\quad j=1,\ldots,M \tag{۲۰}$$

که (A_e,B_e,C_e) تحقق فضای حالت مینیمال ماتریس انتقال پایدار $H_n(s)$ در رابطه‌ی (۱۵) است و $\bar{b}=\hat{b}\theta_r^*$. با توجه به فرض ۴، تابع تبدیل مدل مرجع، اکیداً حقیقی مثبت است بنابراین طبق لم میر-کالمن-یاکوبوویچ[۳]، ماتریس مثبت معین و متقارن P وجود دارد که در تساوی (۲۱) صدق می‌کند:

$$\hat{A}^{T}P+P\hat{A}+\xi\xi^{T}+\nu Q=0$$
$$P\hat{b}\theta_{r}^{*}=\hat{c} \tag{۲۱}$$

که ξ یک بردار است و Q هر ماتریس مثبت معین و متقارنی است و ν ثابت مثبتی است. همچنین از آنجایی که A_e در رابطه‌ی (۲۰)، پایدار است رابطه‌ی زیر برقرار است:

$$A_{e}^{T}P_{zj}+P_{zj}A_{e}+Q_{zj}=0,\quad j=1,\ldots,M \tag{۲۲}$$

که در آن $P_{zj}=P_{zj}^{T}>0\ ,\ Q_{zj}=Q_{zj}^{T}>0$.

قوانین بهنگام‌سازی پارامترها، به شکل روابط (۲۳)و (۲۴) انتخاب می‌شوند:

$$\dot{\theta}(t)=-\operatorname{sgn}(k_{p})\Gamma^{-1}\omega(t)f(e(t)) \tag{۲۳}$$

$$\dot{\tilde{k}}(t)=\frac{1}{2}\psi^{-1}\operatorname{sgn}(k_{p})f^{2}(e(t)) \tag{۲۴}$$

که $\Gamma=\Gamma^T>0$ و ψ ثابت مثبتی است.

با توجه به فرض ۴ و رابطه‌ی (۲۰)، رابطه‌ی (۱۹) به شکل رابطه‌ی (۲۵)، قابل بازنویسی است:

$$\dot{e}(t)=-a_{r}e(t)+k_{p}\{\tilde{\theta}^{T}(t)\omega(t)-\tilde{k}(t)f(e(t))-\frac{1}{\sigma}e(t)-\theta_{r}^{*}r(t)-\theta_{e}^{*}y_{r}(t)-$$
$$k_{I}\operatorname{sgn}(k_{p})\int_{0}^{t}f(e(t))dt+\left(1-\theta_{1}^{*^{T}}H(s)\right)[d(t)]+\sum_{j=1}^{M}a_{\tau j}^{*^{T}}e_{x}(t-\tau_{j}(t))$$
$$+\sum_{j=1}^{M}a_{\tau j}^{*^{T}}x_{r}(t-\tau_{j}(t))-\sum_{j=1}^{M}\theta_{zj}^{*^{T}}C_{e}\hat{z}_{ej}(t)+\sum_{j=1}^{M}\theta_{zj}^{*^{T}}H_{n}(s)\left[x_{r}(t-\tau_{j}(t))\right]\} \tag{۲۵}$$

قضیه‌ی ۱: سیستم حلقه بسته‌ی تعریف شده با فرایند (۱)، کنترل‌کننده‌ی (۱۷) و الگوریتم‌های بهنگام‌سازی (۲۳) و (۲۴) را در نظر بگیرید. همه‌ی سیگنال‌های سیستم حلقه بسته کراندارند و $\lim_{t\to\infty} e(t) = 0$.

اثبات قضیه‌ی ۱: برای بررسی پایداری از تابع V استفاده می‌شود:

$$V = V_1 + V_2 + V_3 + V_4$$

$$V_1 = \frac{\left|e(t)\right|^{1+\alpha}}{1+\alpha} + \sum_{j=1}^{M} \hat{z}_{ej}^{\,T}(t) P_{zj}\, \hat{z}_{ej}(t) + \frac{\nu}{2M}\sum_{j=1}^{M} \int_{t-\tau_j(t)}^{0} e_x^{\,T}(s) Q\, e_x(s)\, ds$$

$$V_2 = \gamma^{-1}\left|k_p\right|(\beta(t) + \eta^* sgn(f(e(t)))^2$$

$$V_3 = \frac{1}{2}\left|k_p\right|(\tilde{\theta}(t) - \theta_0)^T \Gamma(\tilde{\theta}(t) - \theta_0)$$

$$V_4 = \left|k_p\right|\psi(\tilde{k} - k_0)^2 \tag{۲۶}$$

$$k_0 = -\frac{r_0}{k_p} \tag{۲۷}$$

بهره‌ی تطبیق اسکالر مجازی $\beta(t)$، ثابت مثبت η^*، پارامتر مثبت r_0 و بردار θ_0، که هم اندازه‌ی بردار $\theta(t)$ است، بعداً تعریف خواهند شد.

با استفاده از رابطه‌ی (۲۲) و قوانین بهنگام‌سازی پارامترها، مشتقات زمانی $\dot{V}_1(t)$،$\dot{V}_2(t)$، $\dot{V}_3(t)$ و $\dot{V}_4(t)$ از رابطه‌ی (۲۶)، در امتداد رابطه‌ی(۲۰) و با استفاده از رابطه‌ی (۲۵)، عبارت است از:

$$\dot{V}_1(t) = f(e(t))\dot{e}(t) - \sum_{j=1}^{M} \hat{z}_{ej}^{\,T}(t) Q_{zj}\hat{z}_{ej}(t) + \frac{\nu}{2} e_x^{\,T}(0) Q e_x(0) - \frac{\nu}{2M}\sum_{j=1}^{M}\left(1-\dot{\tau}_j(t)\right) e_x^{\,T}\left(t-\tau_j(t)\right) Q e_x\left(t-\tau_j(t)\right) +$$

$$2\sum_{j=1}^{M} \hat{z}_{ej}^{\,T}(t) P_{zj} B_e e_x\left(t-\tau_j(t)\right)$$

$$= -a_r f(e(t))e(t) + f(e(t))k_p\{\tilde{\theta}^T(t)\omega(t) - \tilde{k}(t) f(e(t)) - k_I \operatorname{sgn}(k_p)\int_0^t f(e(t))\,dt + \left(1-\theta_1^{*T} H(s)\right)[d(t)] -$$

$$\frac{1}{\sigma}e(t) - \sum_{j=1}^{M}\theta_{zj}^{*T} H_n(s)\left[x_r\left(t-\tau_j(t)\right)\right] - \sum_{j=1}^{M}\theta_{zj}^{*T} C_e \hat{z}_{ej}(t) + \sum_{j=1}^{M} a_{\tau j}^{*T} e_x\left(t-\tau_j(t)\right) + \sum_{j=1}^{M} a_{\tau j}^{*T} x_r\left(t-\tau_j(t)\right) - \theta_r^* r(t)$$

$$-\theta_e^* y_r(t)\,\} - \sum_{j=1}^{M}\hat{z}_{ej}^{\,T}(t) Q_{zj}\hat{z}_{ej}(t) + \frac{\nu}{2} e_x^{\,T}(0) Q e_x(0) - \frac{\nu}{2M}\sum_{j=1}^{M}\left(1-\dot{\tau}_j(t)\right) e_x^{\,T}\left(t-\tau_j(t)\right) Q e_x\left(t-\tau_j(t)\right)$$

$$+2\sum_{j=1}^{M}\hat{z}_{ej}^{\,T}(t) P_{zj} B_e e_x\left(t-\tau_j(t)\right)$$

در رابطه‌ی $\dot{V}_1(t)$، با توجه به رابطه‌ی (۱۸) می‌توان نوشت:

$$-a_r f(e(t))e(t) = -a_r|e(t)|^{1+\alpha}$$

و نیز مقدار اولیه‌ی خطای حالت، صفر در نظر گرفته می‌شود، یعنی:$e_x(0) = 0$.

لم ۱:خطای اولیه‌ی غیر صفر، تاثیری در نتایج پایداری ندارد [۸].

با اعمال این تغییرات رابطه‌ی $\dot{V}_1(t)$، به شکل رابطه‌ی(۲۸)، بازنویسی می‌شود:

$$\dot{V}_1(t) = -a_r \left|e(t)\right|^{1+\alpha} + f\left(e(t)\right)k_p\{\, \tilde{\theta}^T(t)\,\omega(t) - \tilde{k}(t) f\left(e(t)\right) - k_I \operatorname{sgn}\left(k_p\right)\int_0^t f\left(e(t)\right)dt - \frac{1}{\sigma}e(t) -$$
$$\sum_{j=1}^{M}\theta_{zj}^{*T} H_n(s)\left[x_r\left(t-\tau_j(t)\right)\right] - \theta_r^* r(t) + \left(1-\theta_1^{*T} H(s)\right)\left[d(t)\right] - \theta_e^* y_r(t) + \sum_{j=1}^{M} a_{\tau j}^{*T} e_x\left(t-\tau_j(t)\right)$$
$$+\sum_{j=1}^{M} a_{\tau j}^{*T} x_r\left(t-\tau_j(t)\right) - \sum_{j=1}^{M}\theta_{zj}^{*T} C_e \hat{z}_{ej}(t)\} + 2\sum_{j=1}^{M}\hat{z}_{ej}^{\,T}(t) P_{zj} B_e e_x\left(t-\tau_j(t)\right) - \sum_{j=1}^{M}\hat{z}_{ej}^{\,T}(t) Q_{zj}\hat{z}_{ej}(t)$$
$$-\frac{\nu}{2M}\sum_{j=1}^{M}\left(1-\dot{\tau}_j(t)\right)e_x^{\,T}\left(t-\tau_j(t)\right)Q e_x\left(t-\tau_j(t)\right) \tag{۲۸}$$

$$\dot{V}_2(t) = 2\gamma^{-1}\left|k_p\right|(\beta(t)+\eta^*\operatorname{sgn}(f\left(e(t)\right))\dot{\beta}(t) \tag{۲۹}$$

$$\theta_0^T = \left[\frac{1}{\sigma}, 0, \dots, 0\right] \tag{۳۰}$$

$$\dot{V}_3(t) = -k_p\tilde{\theta}^T(t)\,\omega(t)\, f\left(e(t)\right) + k_p\theta_0^T\omega(t)\, f\left(e(t)\right) = -k_p\tilde{\theta}^T(t)\,\omega(t)\, f\left(e(t)\right) + k_p f\left(e(t)\right)\frac{1}{\sigma}e(t) \tag{۳۱}$$

در بدست آوردن رابطه‌ی (۳۱)، از رابطه‌ی (۳۰) و تعریف بردار رگرسور استفاده شده است.

$$\dot{V}_4(t) = -k_p\tilde{k}(t)\, f^2\left(e(t)\right) + k_p k_0 f^2\left(e(t)\right)$$

با استفاده ازرابطه‌ی (۲۷)، $\dot{V}_4(t)$ به شکل رابطه‌ی (۳۲) بازنویسی می‌شود:

$$\dot{V}_4(t) = -k_p\tilde{k}(t) f^2(e(t)) - r_0 f^2(e(t)) = -k_p\tilde{k}(t) f^2(e(t)) - f(e(t)) r_0 f(e(t)) \tag{۳۲}$$

لم ۲: برای هر دو بردار دلخواه x و y و ماتریس مثبت معین S، با ابعاد مناسب، می‌توان نوشت:

$$\mp 2x^T y \le x^T S x + y^T S^{-1} y$$

با استفاده از لم ۲، برای برخی از جملات $\dot{V}_1(t)$ می‌توان نوشت:

$$\sum_{j=1}^{M} f\left(e(t)\right)k_p a_{\tau j}^{*T} e_x\left(t-\tau_j(t)\right) \le f\left(e(t)\right)\frac{1}{2}\Psi_1 f\left(e(t)\right) + \sum_{j=1}^{M} e_x^{\,T}\left(t-\tau_j(t)\right)\frac{1}{2} S e_x\left(t-\tau_j(t)\right)$$
$$-\sum_{j=1}^{M} f\left(e(t)\right)k_p\theta_{zj}^{*T} C_e\hat{z}_{ej}(t) \le f\left(e(t)\right)\frac{1}{2}\Psi_2 f\left(e(t)\right) + \sum_{j=1}^{M}\hat{z}_{ej}^{\,T}(t)\frac{1}{2} S\hat{z}_{ej}(t)$$
$$2\sum_{j=1}^{M}\hat{z}_{ej}^{\,T}(t) P_{zj} B_e e_x\left(t-\tau_j(t)\right) \le \sum_{j=1}^{M}\hat{z}_{ej}^{\,T}(t) S\hat{z}_{ej}(t) + \sum_{j=1}^{M} e_x^{\,T}\left(t-\tau_j(t)\right)\Psi_{3j} e_x\left(t-\tau_j(t)\right) \tag{۳۳}$$

که در آن‌ها:

$$\Psi_1 = \sum_{j=1}^{M} {k_p}^2\, a_{\tau j}^{*T} S^{-1} a_{\tau j}^*$$
$$\Psi_2 = \sum_{j=1}^{M} {k_p}^2\, \theta_{zj}^{*T} C_e S^{-1} {C_e}^T \theta_{zj}^*$$
$$\Psi_{3j} = {B_e}^T {P_{zj}}^T S^{-1} P_{zj} B_e \tag{۳۴}$$

و با استفاده از کرانداری سیگنال‌های مرجع یعنی: $|r(t)| \le r^*$، $|y_r(t)| \le y_r^*$ و $\|x_r(t)\| \le x_r^*$ و پایداری توابع تبدیل $H(s)$ و $H_n(s)$، برای سایر جملات $\dot{V}_1(t)$ می‌توان نوشت:

$$-f\left(e(t)\right)k_p\theta_r^* r(t) \le \left|f\left(e(t)\right)\right|\left|k_p\right|\left|\theta_r^*\right|\left|r(t)\right| \le \left|f\left(e(t)\right)\right|\left|k_p\right|\left|\theta_r^*\right| r^* = \eta_0^*\left|k_p\right|\left|f\left(e(t)\right)\right| \tag{۳۵}$$

$$-f\left(e(t)\right)k_p\theta_e^* y_r\left(t\right) \le \left|f\left(e(t)\right)\right|\left|k_p\right|\left|\theta_e^*\right|\left|y_r\left(t\right)\right| \le \left|f\left(e(t)\right)\right|\left|k_p\right|\left|\theta_e^*\right| y_r^* = \eta_1^*\left|k_p\right|\left|f\left(e(t)\right)\right| \tag{۳۶}$$

$$\sum_{j=1}^{M} f\left(e(t)\right)k_p a_{\tau j}^{*T} x_r\left(t-\tau_j\left(t\right)\right) \le \sum_{j=1}^{M}\left|f\left(e(t)\right)\right| k_p a_{\tau j}^{*T} x_r\left(t-\tau_j\left(t\right)\right) \le$$
$$\sum_{j=1}^{M}\left|f\left(e(t)\right)\right|\left|k_p\right|\left|a_{\tau j}^{*T}\right| x_{rj}^* = \eta_2^*\left|k_p\right|\left|f\left(e(t)\right)\right| \tag{۳۷}$$

$$-\sum_{j=1}^{M} f\left(e(t)\right)k_p\theta_{zj}^{*T} H_n(s)\left[x_r\left(t-\tau_j(t)\right)\right] \le \sum_{j=1}^{M}\left|f\left(e(t)\right)\right|\left|k_p\right| \| \theta_{zj}^{*T} H_n(s) \|_\infty \| x_r\left(t-\tau_j(t)\right) \| \le$$
$$\sum_{j=1}^{M}\left|f\left(e(t)\right)\right|\left|k_p\right| \| \theta_{zj}^{*T} H_n(s) \|_\infty\, x_{rj}^* = \eta_3^*\left|k_p\right|\left|f\left(e(t)\right)\right| \tag{۳۸}$$

$$f\left(e(t)\right)k_p\left(1-\theta_1^{*T} H(s)\right)\left[d(t)\right] \le \left|f\left(e(t)\right)\right|\left|k_p\right| \| \left(1-\theta_1^{*T} H(s)\right) \|_\infty \left|d(t)\right| \le$$
$$\left|f\left(e(t)\right)\right|\left|k_p\right| \| \left(1-\theta_1^{*T} H(s)\right) \|_\infty\, d^* = \eta_4^*\left|k_p\right|\left|f\left(e(t)\right)\right| \tag{۳۹}$$

که در آن‌ها:

$$\eta_0^* = |\theta_r^*| r^*,$$
$$\eta_1^* = |\theta_e^*| y_r^*,$$
$$\eta_2^* = \textstyle\sum_{j=1}^{M} \left\| a_{\tau j}^{*T} \right\| x_{rj}^*,$$
$$\eta_3^* = \sum_{j=1}^{M} \left\| \theta_{zj}^{*T} H_n(s) \right\|_\infty x_{rj}^*,$$
$$\eta_4^* = \left\| \left(1-\theta_1^{*T} H(s)\right) \right\|_\infty d^*$$

اعمال روابط (۳۳)–(۳۹)، به $\dot{V}_1(t)$ و سپس استفاده از روابط (۲) و (۲۸)–(۳۲)، نتیجه می‌دهد:

$$\dot{V}(t) \le -a_r\left|e(t)\right|^{1+\alpha} - \sum_{j=1}^{M}\hat{z}_{ej}^{\,T}(t)(Q_{zj}-\frac{3}{2}S)\hat{z}_{ej}(t) - f(e(t))(r_0-\frac{1}{2}\Psi_1-\frac{1}{2}\Psi_2)f(e(t)) +$$
$$2\gamma^{-1}\left|k_p\right|(\beta(t)+\eta^*\operatorname{sgn}(f(e(t)))\dot{\beta}(t) + f\left(e(t)\right)k_p\left\{-k_I\operatorname{sgn}\left(k_p\right)\int_0^t f\left(e(t)\right)dt\right\} -$$
$$\sum_{j=1}^{M} e_x^{\,T}\left(t-\tau_j(t)\right)(\bar{\nu}Q-\frac{1}{2}S-\Psi_{3j})e_x\left(t-\tau_j(t)\right) + 2\eta^*\left|k_p\right|\left|f\left(e(t)\right)\right| \tag{۴۰}$$

که در آن:

$$2\eta^* = \eta_0^* + \eta_1^* + \eta_2^* + \eta_3^* + \eta_4^* \ ,$$
$$\bar{\nu} = \frac{\nu\bar{\tau}}{2M} \ , \qquad \bar{\tau} = 1-\tau^* > 0$$

در رابطه‌ی(۴۰)، با تعریف $k_I = 2\,\gamma$ و بهره‌ی تطبیق مجازی به صورت رابطه‌ی(۴۱):

$$\dot{\beta}(t) = -\gamma f\big(e(t)\big), \qquad \beta(0) = 0 \tag{۴۱}$$

و نیز با تعریف $Q = Q_1 + Q_2$ و $Q_{zj} = Q_{z1j} + Q_{z2j}$، که:

$$Q_1 = Q_1^{\,T} > 0,$$
$$Q_2 = Q_2^{\,T} > 0,$$
$$Q_{z1j} = Q_{z1j}^{\,T} > 0,$$
$$Q_{z2j} = Q_{z2j}^{\,T} > 0$$

و انتخاب مقادیر r_0، Q_2 و Q_{z2j}، به طوری که در نامعادله‌های (۴۲) صدق کنند:

$$r_0 > \lambda_{max}\left(\frac{1}{2}\Psi_1 + \frac{1}{2}\Psi_2\right)$$
$$\lambda_{min}(\bar{v}Q_2) > \lambda_{max}\left(\frac{1}{2}S + \Psi_{3j}\right)$$
$$\lambda_{min}\left(Q_{z2j}\right) > \lambda_{max}\left(\frac{3}{2}S\right), \quad j = 1, \ldots, M. \tag{۴۲}$$

نتیجه گرفته می‌شود که:

$$\dot{V}(t) \le -a_r \left|e(t)\right|^{1+\alpha} - \sum_{j=1}^{M} \hat{z}_{ej}^{\,T}(t) Q_{z1j} \hat{z}_{ej}(t) - \sum_{j=1}^{M} e_x^{\,T}\left(t-\tau_j(t)\right) \bar{V} Q_1 e_x\left(t-\tau_j(t)\right) \le 0 \tag{۴۳}$$

بنابراین نتیجه می‌شود که V و در نتیجه $e(t)$، $\hat{z}_{ej}(t)$، $z_{ej}(t)$، $e_x(t)$، $\dot{\beta}(t)$، $\beta(t)$، $\tilde{\theta}(t)$، $\theta(t)$، $\tilde{k}(t)$ و $\hat{e}(t)$ (چون $e(t) = \hat{c}^T\hat{e}(t)$)، L_∞ هستند و نیز از آنجایی که $\hat{e}(t) = \hat{x}(t) - \hat{x}_r(t)$ و $\hat{x}(t) = [x \;\; x_1 \, x_2]^T$، نتیجه می‌شود که $\hat{x}(t)$، x، x_1 و x_2 و در نتیجه ورودی کنترل و خروجی فرایند و $\dot{e}(t)$ نیز L_∞ خواهند بود. ازرابطه‌ی(۴۳)، نتیجه می‌شود که $e(t)\epsilon L^{1+\alpha}$، بنابراین از لم باربالات نتیجه گرفته می‌شود که $\lim_{t\to\infty} e(t) = 0$.

تذکر ۲) ماتریس‌های Q و Q_z و پارامتر مثبت r_0 که در رابطه‌ی (۲۷)، بکار رفته است، فقط برای آنالیز هستند و در قانون کنترل انعکاس نمی‌یابند. بهره‌های کنترل‌کننده، به طور اتوماتیک برای غلبه بر تاثیرات ناخواسته‌ی حالت‌های تاخیردار، نامعینی‌های پارامتر و اغتشاش خارجی، تنظیم می‌شوند.

تذکر ۳) قضیه‌ی ۱، نشان می‌دهد که پایداری سیستم حلقه بسته و پارامترهای کنترل‌کننده، کاملاً مستقل از مقدار تاخیرهای زمانی فرایند است. همچنین کنترل‌کننده در مقابل اغتشاش خارجی مقاوم است.

تذکر ٤) محدودیت کمتر از یک بودن مشتق تاخیرهای زمانی، به علت استفاده از تابع لیاپانوف-کراسفسکی در اثبات پایداری اعمال شده است. در صورتی که بتوان اثبات پایداری را با تابع شبه لیاپانوف[۴] انجام داد، دیگر نیازی به کمتر از یک بودن مشتق تاخیرها نخواهد بود. در مرجع [۱]، با فرض اینکه مقادیر فعلی همه‌ی حالتها موجود است کنترل‌کننده‌ی فیدبک حالت مقاوم تطبیقی پیوسته‌ی بدون حافظه‌ای ارائه شده‌است که با استفاده از تابع شبه لیاپانوف ثابت می‌شودکه پاسخ‌های این سیستم به‌طور نمایی و یکنواخت به‌کره‌ای که شعاع آن می‌تواند به‌کوچکی مطلوب باشد، همگرا خواهند شد و با اثبات پایداری با تابع شبه لیاپانوف فرض کمتر از یک بودن مشتق تاخیرها، در این مرجع حذف شده است. در واقع در صورتی که بتوان اثبات پایداری را بدون استفاده از مولفه‌ی انتگرالی V_1، انجام داد، دیگر نیازی به فرض کمتر از یک بودن نرخ تغییر تاخیر نخواهد بود.

تذکر ۵) با توجه به محدودیت دامنه‌ی سیگنال کنترلی در اکثر سیستم‌های عملی، در صورتی که قانون تنظیم تطبیقی، بدون توجه به مسئله‌ی اشباع ورودی طراحی گردد، ممکن است کنترل‌کننده‌ی تطبیقی، عملکرد ضعیفی داشته باشد و یا حتی سیستم حلقه بسته ناپایدار گردد. مرجع [۹]، یکی از مقالاتی است که در آن، به موضوع اشباع ورودی در مبحث کنترل تطبیقی پرداخته شده است.

تذکر ٦) در مواردی که درجه‌ی نسبی فرایند تحت بررسی یک است، جهت اثبات پایداری، لازم است تابع تبدیل مدل مرجع، اکیداً حقیقی مثبت باشد و در مواردی که درجه‌ی نسبی فرایند تحت بررسی از یک بزرگتر است بایستی از خطای افزوده[۵] استفاده نمود. در چنین شرایطی تابع تبدیل مدل مرجع نمی‌تواند اکیداً حقیقی مثبت باشد و معادله‌ی خطای (۱۹)، قابل اعمال نخواهد بود.

در مرجع [۱۰]، یک روش طراحی از کنترل تطبیقی مدل مرجع، برای فرایندهای با تاخیر در حالت، از طریق فیدبک خروجی ارائه شده است. نشان داده شده است که روند طراحی ارائه شده می‌تواند در درجه‌های نسبی بالا، بدون ساختارهای کنترلی پیچیده و بدون مشتقات زمانی خروجی، بکار رود. خطاهای خروجی به نواحی باقیمانده‌ای[۶] که دامنه‌ی آن‌ها می‌تواند با انتخاب پارامترهای طراحی در رویتگرهای بهره‌ی بالا، به طور دلخواه کوچک شود، همگرا می‌شوند. سیستم نامی، رویت‌پذیر فرض شده است و تاخیر زمانی شناخته شده است.

۶- شبیه‌سازی

برای روشن ساختن نتایج حاصل، از یک سیستم مرتبه‌ی دوم دارای تاخیر در حالت استفاده می‌شود:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & -2\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2\\ 0\end{bmatrix}u(t)+\begin{bmatrix}2\\ 0\end{bmatrix}d(t)+\begin{bmatrix}-0.2 & -0.1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t-\tau)\\ x_2(t-\tau)\end{bmatrix}$$
$$y(t)=\begin{bmatrix}1 & 0.5\end{bmatrix}x(t)$$
$$x(0)=\begin{bmatrix}0 & 0\end{bmatrix}^T \qquad (۴۴)$$

تمامی پارامترهای فرایند و اغتشاش خارجی $d(t) = 0.5\sin(0.5t) + 0.5$، برای کنترل‌گر نامعین هستند. مقادیر پارامترهای کنترل‌کننده‌ی تطبیقی (۱۷) و قوانین تطبیق (۲۳) و (۲۴)، در شبیه‌سازی، به شکل $H(s) = \frac{1}{s+1}$، $k_I = 0.01$، $\sigma = 0.2$، $\alpha = \frac{1}{4}$، $\Gamma = 0.5$ و $\psi = 5$ انتخاب می‌شوند. مقدار تاخیر 15 ثانیه در نظر گرفته می‌شود.

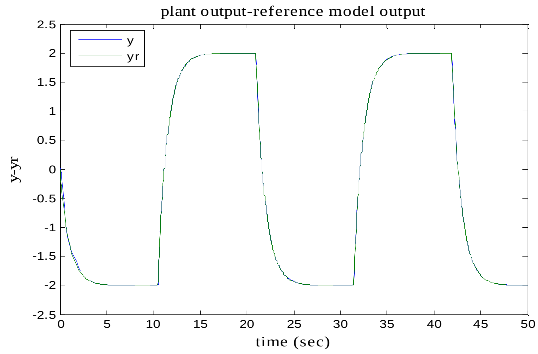
سیستم مدل مرجع عبارت است از:

$$\dot{x}_r(t)=\begin{bmatrix}-2 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}x_r(t)+\begin{bmatrix}2\\ 0\end{bmatrix}r(t)$$
$$y_r(t)=\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}x_r(t)$$
$$x_r(0)=\begin{bmatrix}0 & 0\end{bmatrix}^T \qquad (۴۵)$$

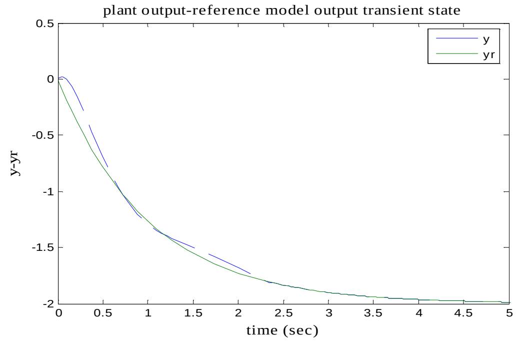
ورودی مرجع یک سیگنال مربعی با دامنه‌ی 1 و فرکانس پایه‌ی 0.3 رادیان بر ثانیه است.

نتایج شبیه‌سازی در شکل‌های(۲)–(۸)، نشان داده شده است.

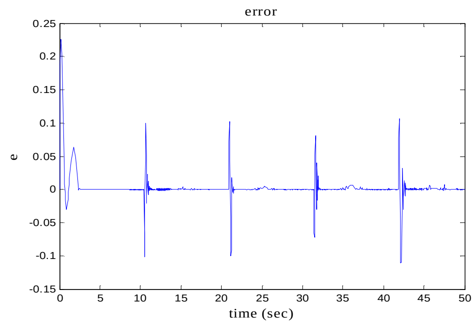
[DOR: 20.1001.1.23223146.1392.1.2.6.4]



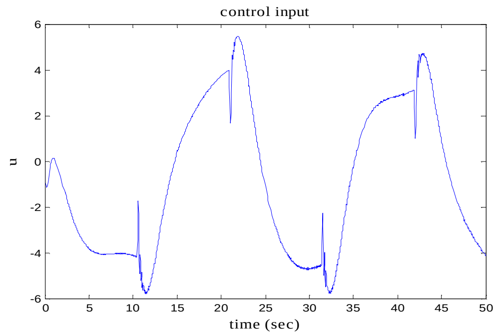
شکل ۲: خروجی فرایند و خروجی مدل مرجع



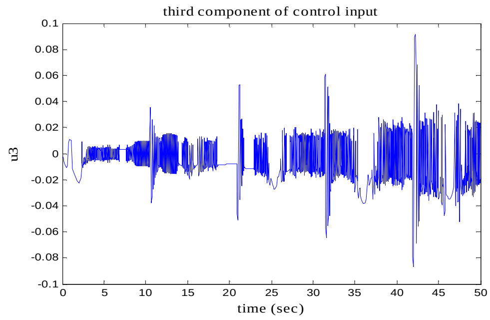
شکل ۳: حالت گذرای خروجی فرایند و مدل مرجع



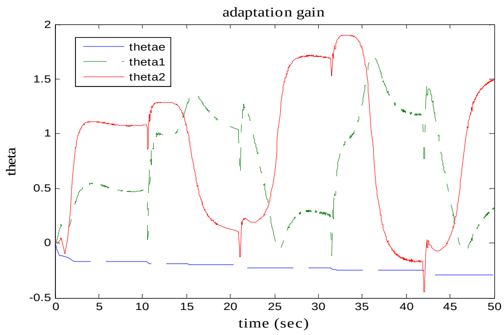
شکل ۴: خطا، اختلاف خروجی فرایند و مدل مرجع



شکل ۵: ورودی کنترل



شکل ۶: مولفه‌ی سوم ورودی کنترل



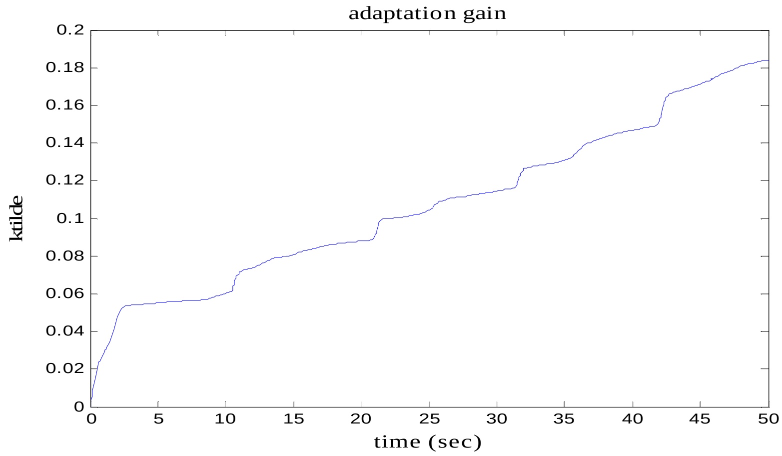
شکل ۷: بهره‌ی تطبیق $\theta(t)$

شکل‌های (۲)-(۴)، نشان‌دهنده‌ی عملکرد مناسب تعقیب مسیر، در هر دو حالت گذرا و دائم است. شکل (۳)، عملکرد تعقیب مسیر را، در 5 ثانیه‌ی اول مسیر نشان می‌دهد و با توجه به شکل مشخص است که در این شبیه‌سازی، کنترل‌کننده، توانسته است سیستم حلقه بسته را، در زمانی کمتر از 2.5 ثانیه، از حالت گذرا خارج کند.

در تابع پیوسته‌ی f(e(t))، بین دو حالت خطای بزرگتر مساوی صفر و کمتر از صفر، عمل سوئیچ[۷] انجام می‌گیرد و همین مسئله، با توجه به این‌که مولفه‌ی سوم کنترل‌کننده، تاثیرپذیری زیادی از سیگنال f(e(t)) دارد، باعث ایجاد نوسانات شدیدی در این مولفه از سیگنال کنترل می‌شود. با توجه به شکل (۶)، مشاهده می‌شود که مولفه‌ی سوم کنترل‌کننده، دارای نوساناتی با سرعت بالاست. انجام بررسی‌های دقیق‌تر، با بزرگنمایی قسمت‌های پر نوسان شکل، نشان می‌دهد که سرعت نوسان‌ها، در پر نوسان‌ترین بخش‌ها،

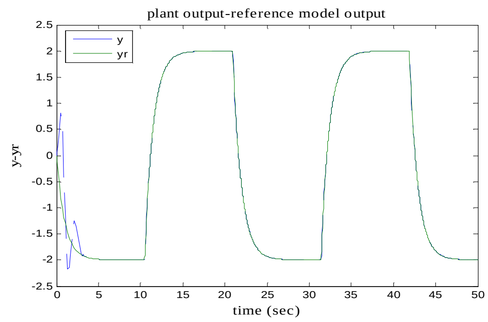
در حدود چند صدم ثانیه است و چون محرک‌هایی با سرعت بالاکه می‌توانند در محدوده‌ی فرکانسی مورد نیاز کار کنند، وجود دارد، مشکلی در پیاده‌سازی این کنترل‌کننده ایجاد نمی‌شود. البته انتخاب مقداری بزرگتر برای ثابت طراحی α، که مقداری بین صفر و یک است، سرعت نوسانات مولفه‌ی سوم کنترل‌کننده را، در ازای کاهش دقت تعقیب مسیر و افزایش خطا، کاهش می‌دهد. در واقع، در انتخاب α، باید مصالحه‌ای بین دقت مطلوب تعقیب مسیر و قابلیت پیاده‌سازی کنترل‌کننده صورت گیرد.

شکل (۷)، بردار بهره‌ی تطبیق $\theta(t)$ را به ازای مقادیر اولیه‌ی صفر نشان می‌دهد. با تغییر دادن مقادیر اولیه، بردار بهره‌ی تطبیق نیز تغییر خواهد کرد. با توجه به قضیه‌ی ۱، محدود ماندن بردار بهره‌ی تطبیق، تضمین می‌شود، اما این قضیه، تضمین‌کننده‌ی همگرا شدن این بردار، به یک بردار بهره‌ی خاص، نیست و همین مسئله، تغییر کردن بردار بهره‌ی تطبیق را، به ازای مقادیر اولیه‌ی مختلف، توجیه می‌کند. البته بدیهی است که با توجه به ویژگی‌های کنترل تطبیقی، همگرا نشدن بردار بهره‌ی تطبیق به یک بردار بهره‌ی یکسان، به ازای مقادیر اولیه‌ی مختلف، تاثیری در عملکرد کنترل‌کننده نخواهد داشت.

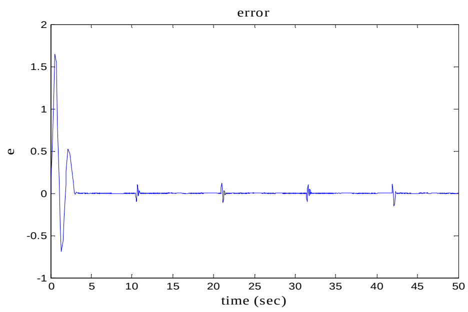


شکل ۸: بهره‌ی تطبیق $\tilde{k}(t)$

برای مشخص شدن اهمیت مولفه‌ی تناسبی کنترل‌کننده‌ی (۱۷) در بهبود وضعیت گذرای سیستم حلقه بسته، نتایج شبیه‌سازی مثال موردی بدون مولفه‌ی تناسبی، در شکل‌های (۹)-(۱۰) نشان داده شده است.



شکل ۹: خروجی فرایند و خروجی مدل مرجع بدون مولفه‌ی تناسبی کنترل‌کننده‌ی (۱۷)



شکل ۱۰: اختلاف خروجی فرایند و خروجی مدل مرجع بدون مولفه‌ی تناسبی کنترل‌کننده‌ی (۱۷)

برای مقایسه‌ی نتایج حاصل از کنترل‌کننده‌ی (۱۷)، با سایر کنترل‌کننده‌ها، از کنترل‌کننده‌ی مرجع [۳]، استفاده می‌شود. کنترل‌کننده‌ی پیشنهادی و قانون بهنگام‌سازی این مرجع، مطابق روابط (۴۶) و (۴۷) است:

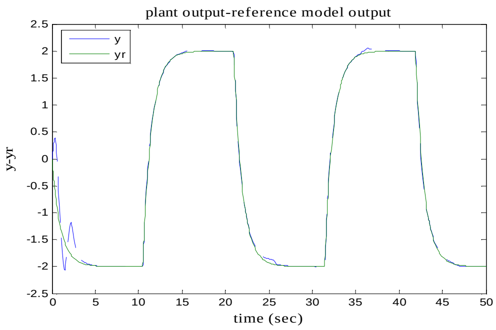
$$u(t) = \theta^T(t)\omega(t) - k_I sgn(e(t))\int_0^t |e(t)|dt \qquad (۴۶)$$

که در آن، بهره‌ی تطبیق، یعنی $\theta(t)$ برابر است با: $\theta(t) = [\theta_e(t)\theta_1^T(t)\theta_2^T(t)]^T \epsilon\, \boldsymbol{R}^{2n-1}$ و بردار رگرسور برابر است با: $\omega(t) = [e(t)x_1^T(t)x_2^T(t)]^T \epsilon\, \boldsymbol{R}^{2n-1}$. پارامتر طراحی k_I ثابت است. $x_1(t)$ و $x_2(t)$ حالت‌های فیلترهای استانداردی هستند که از خروجی فرایند و سیگنال کنترل استفاده می‌کنند.

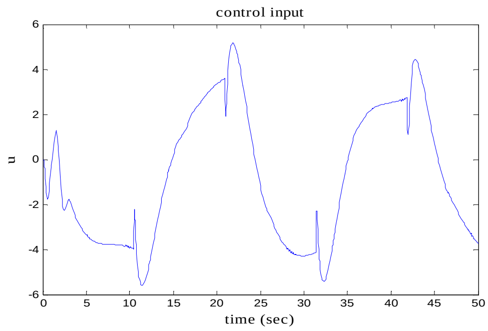
$$\alpha(t) = sgn(\rho^*)\Gamma^{-1}\,\omega(t)e(t) \qquad (۴۷)$$

که در آن، $\Gamma = \Gamma^T > 0$ ماتریس طراحی و h ثابت مثبت طراحی است. ρ^*، برابر نسبت بهره‌ی فرکانس بالای فرایند تحت بررسی، با فرض عدم حضور تاخیر و اغتشاش، بر بهره‌ی فرکانس بالای سیستم مدل مرجع است. در شبیه‌سازی از $H(s) = \frac{1}{s+1}$، $k_I = 0.01$، $\Gamma = 0.5$ و $h = 1$ استفاده می‌شود.

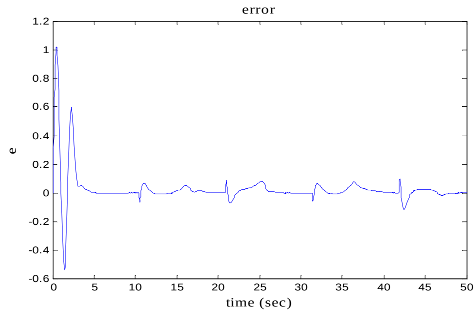
نتایج حاصل در شکل‌های (۱۱)-(۱۴) آورده شده است.



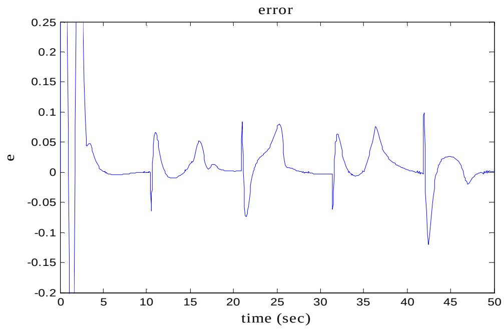
شکل ۱۱: خروجی فرایند و خروجی مدل مرجع



شکل ۱۲: کنترل‌کننده‌ی مرجع [۳]



شکل ۱۳: اختلاف خروجی فرایند و خروجی مدل مرجع



شکل ۱۴: اختلاف خروجی فرایند و خروجی مدل مرجع، با تغییر در محدوده‌ی محور عمودی

نتایج شبیه‌سازی مرجع [۳]، نشان می‌دهد که عملکرد تعقیب مسیر سیستم حلقه بسته در حالت دائم از دقت قابل قبولی برخوردار است اما سیستم حلقه بسته، در حالت گذرا دارای نوسانات با دامنه‌ی بزرگ است. مقایسه‌ی نتایج دو شبیه‌سازی مشخص می‌کند که

ویژگی‌های مطلوب کنترل‌کننده‌ی پیشنهادی، بدون ایجاد تغییر محسوس در دامنه‌ی سیگنال کنترلی ایجاد می‌شوند. به عبارت دیگر ورودی کنترل از نظر دامنه، در هر دو کنترل‌کننده مشابه است ولی عملکرد کنترل‌کننده‌ی پیشنهادی نسبت به کنترل‌کننده‌ی مرجع [۳]، مناسب‌تر است. از طرفی مولفه‌ی دوم کنترل‌کننده‌ی مرجع [۳]، شامل غیرخطی‌گری ناپیوسته‌ی sgn می‌باشد که مشکلات عملی و پیاده‌سازی ایجاد می‌کند.

۷- نتیجه‌گیری

روش کنترلی فیدبک خروجی تطبیقی چهار بخشی ارائه شده، بدون نیاز به سیگنال‌های ورودی مرجع با مولفه‌های فرکانسی کافی، عملکرد تعقیب مسیر مناسبی، در هر دو حالت دائم و گذرا دارد. در اثبات پایداری، از یک تابع لیاپانوف-کراسفسکی استفاده شده است. نتایج شبیه‌سازی، مؤید نتایج تئوری هستند.

مراجع

[1] H. Wu, “Adaptive robust control of uncertain dynamical systems with multiple time-varying delays,” IET Control Theory and Applications, vol. 4, Iss.9, pp. 1775-1784, 2010.

[2] Y. Zhang and F. Zhang, “Adaptive control for a class of uncertain interconnected time-delay system,” Second International Conference on Digital Manufacturing and Automation, Zhangjiajie, Hunan, China, August 5-7, 2011, pp. 146-149.

[3] B. Mirkin and P. O. Gutman, “Robust output feedback model reference adaptive control of SISO plants with multiple uncertain, time varying state delays,” IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 53, no. 10, pp. 2414-2419, 2008.

[4] B. Mirkin and P. O. Gutman, “Robust adaptive output feedback tracking for a class of nonlinear time delayed plants,” IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 55, no. 10, pp. 2418-2424, 2010.

[5] Y. Zhang and P. A. Ioannou, “A new linear adaptive controller: design, analysis and performance,” IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 45, no. 5, pp. 883-897, 2000.

[6] C. Cao and N. Hovakimyan, “Design and analysis of a novel L_1 adaptive control architecture with guaranteed transient performance,” IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 53, no. 2, pp. 586-591, 2008.

[7] G. Tao, Adaptive control design and analysis. New York: Wiley, 2003.

[8] P. A. Ioannou and J. Sun, Robust adaptive control. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, 1996.

[9] N. Takagi, J. Zhuo, M. Oya and Q. Wang, “Modification of an adaptive controller for systems with input saturation and available output derivatives up to the order of relative degree,” Proceedings of 4th International Symposium on Advanced Control of Industrial Processes, Thousand Islands Lake, Hangzhou, P. R. China, May 23-26, 2011, pp. 114-119.

[DOR: 20.1001.1.23223146.1392.1.2.6.4]

[10] Y. Miyasato, "A simple redesign of model reference adaptive control for state-delayed systems with general relative degrees," SICE Annual Conference, The Grand Hotel, Taipei, Taiwan, August 18-21, 2010, pp. 596-601.

1- Lyapunov-Krasovskii
2- Chattering
3- Meyer-Kalman-Yakubovich
4- Quasi Lyapunov function
5- Augmented error
6- Residual regions Switch