



Sahand University  
of Technology

DOR:

[20.1001.1.23223146.1404.12.1.1.4](https://doi.org/10.1001.1.23223146.1404.12.1.1.4)

Journal of Nonlinear  
Systems in Electrical  
Engineering

Vol.12, No.1

Spring and Summer 2025

ISSN: 2322 – 3146

<http://jnsee.sut.ac.ir>

# An efficient method for matching 3D shapes using geometric features

Amirreza Amirfathiyan, Hossein Ebrahimnezhad\*

Computer Vision Res. Lab., Faculty of Electrical Engineering, Sahand University of Technology, Tabriz, Iran.

E-mails: [a\\_amirfathiyan@sut.ac.ir](mailto:a_amirfathiyan@sut.ac.ir); [ebrahimnezhad@sut.ac.ir](mailto:ebrahimnezhad@sut.ac.ir)

## Abstract

In this article, an efficient method for finding the correspondence between 3D models containing dynamic and non-rigid deformations is proposed, which uses the geometric features of the models. For this purpose, an intrinsic feature based on geodesic distances of points is used and the effectiveness of the proposed method for matching three-dimensional shapes is shown. First, a set of landmarks (salient points or special points) are identified and selected by sampling the farthest point. Then, the feature matrix of the models is created based on the geodesic distance of the points of the 3D shapes from the landmarks. In the following, a linear assignment problem is solved by applying the LAPJV algorithm, whose cost function contains the feature matrix of the models. Conducting extensive tests on different models from the standard data set shows the quantitative and qualitative superiority of the proposed method compared to other methods including approaches [48], [50] and [60]. The results show that the proposed method achieves better results in accuracy and efficiency compared to the methods [48], [50] and [60] on models with dynamic and non-rigid deformations and non-isometric cases.

## Keywords

3D Shape Matching; Salient point Detector; Geodesic distance descriptor; Linear Assignment Problems using LAPJV Algorithm; Non-isometric deformations

## 1. Short Introduction

Finding correspondence between 3D shapes is a fundamental task in geometric processing, with applications in shape interpolation, reconstruction, and deformation transfer. Traditional methods, such as those relying on heat kernel signatures or wave kernel maps, excel in isometric deformations but struggle with non-rigid, motional, and non-isometric changes due to altered geodesic distances and computational complexity. This paper proposes an efficient approach using intrinsic geometric features based on geodesic distances from salient points detected via farthest point sampling. The feature matrices are matched through a linear assignment problem solved by the LAPJV algorithm, enhancing accuracy and efficiency. Motivated by the need to address real-world challenges like severe pose variations and non-isometric deformations in standard datasets, our method demonstrates superior quantitative and qualitative performance over existing techniques.

## 2. Proposed Work

The proposed method designs an efficient framework for 3D shape correspondence, comprising three key stages. First, salient points are detected using farthest point sampling based on geodesic distances, approximated via average geodesic distance (AGD) and Fast Marching algorithm, with 16 points selected to balance accuracy and computation. Second, feature matrices are extracted by computing normalized geodesic distances from all vertices to these salient points, forming a robust geometric descriptor. Third, correspondence is established by solving a linear assignment problem (LAP) using the LAPJV algorithm, where the cost matrix derives from Euclidean differences between feature matrices, ensuring unique point-to-point mappings with low complexity. Experimental evaluations were conducted on DT4D (non-rigid deformations) and SMAL (non-isometric deformations) datasets, using MATLAB on a Core-i7 system. Quantitative results, based on geodesic error curves, show the method achieves average geodesic errors of 0.071 on DT4D and 0.1718 on SMAL, outperforming baselines (GDD [48], IDPC [50], and Zoom Out [60]). Area Under geodesic error Curve (AUC) exceed 85% on DT4D and 62% on SMAL, with runtime around ~22 seconds per pair. Qualitative visualizations confirm superior matching in pose-variant and species-differing (non-isometric) shapes. The findings highlight enhanced accuracy and efficiency for non-rigid, non-isometric cases, attributed to intrinsic geodesic features and optimized assignment. Limitations include assumptions of complete meshes and potential sensitivity to extreme outliers; future work will extend to partial/degraded shapes and integrate post-processing for symmetry handling.

## 3. Conclusion

In this paper, an efficient method based on the LAPJV algorithm for linear assignment is proposed to establish unique correspondences between points of 3D shapes using geodesic distance features from salient points. Evaluations on benchmark datasets DT4D and SMAL demonstrate superior accuracy (lower average errors) compared to baselines (methods GDD [48], IDPC [50], and Zoom Out [60]), alongside reduced computational complexity and faster runtime. Overall, the approach excels in handling non-isometric deformations and pose variations.



دانشگاه صنعتی سهند

# یک روش کارآمد برای تناظریابی اشکال سه بعدی با استفاده از ویژگی‌های

هندسی

DOR:

[20.1001.1.23223146.1404.12.1.1.4](https://doi.org/10.1001.1.23223146.1404.12.1.1.4)

نشریه علمی فناوری در مهندسی برق

دوره ۱۲ - شماره ۱

بهار و تابستان ۱۴۰۴

صفحات ۵ الی ۳۵

ISSN: 2322-3146

<http://jnsee.sut.ac.ir>

امیررضا امیرفتحیان<sup>۱</sup>، حسین ابراهیم نژاد<sup>۲\*</sup>

<sup>۱</sup>دانشجوی دکتری مهندسی برق- مخابرات، دانشکده مهندسی برق، دانشگاه صنعتی سهند تبریز، [a\\_amirfathiyan@sut.ac.ir](mailto:a_amirfathiyan@sut.ac.ir)

<sup>۲</sup>نویسنده مسئول، استاد گروه برق- مخابرات، دانشکده مهندسی برق، دانشگاه صنعتی سهند تبریز، [ebrahimnezhad@sut.ac.ir](mailto:ebrahimnezhad@sut.ac.ir)

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۳/۹/۷

تاریخ بازنگری: ۱۴۰۳/۷/۲۵

تاریخ ارسال: ۱۴۰۳/۳/۲۹

## چکیده

در این مقاله یک روش کارآمد برای یافتن تناظر بین مدل‌های سه بعدی حاوی تغییر شکل‌های حرکتی و غیرصلب پیشنهاد شده است که از ویژگی‌های هندسی مدل‌ها استفاده می‌کند. برای این منظور، از یک ویژگی ذاتی مبتنی بر فاصله‌های ژئودزیک نقاط استفاده کرده و اثر بخشی روش پیشنهادی برای تناظریابی اشکال سه بعدی نشان داده می‌شود. ابتدا، مجموعه‌ای از نشانه‌ها (نقاط برجسته یا نقاط ویژه) از طریق نمونه برداری دورترین نقطه، شناسایی و انتخاب می‌شوند. سپس، ماتریس ویژگی مدل‌ها بر اساس فاصله ژئودزیک نقاط اشکال سه بعدی از نشانه‌ها ایجاد می‌شود. در ادامه، با به کارگیری الگوریتم LAPJV یک مسئله تخصیص خطی حل می‌شود که تابع هزینه آن حاوی ماتریس ویژگی مدل‌ها است. انجام آزمایش‌های گسترده روی مدل‌های مختلف از مجموعه داده‌های استاندارد نشان از برتری کمی و کیفی روش پیشنهادی در مقایسه با روش‌های دیگر از جمله رویکردهای [۴۸]، [۵۰] و [۶۰] دارد. نتایج نشان می‌دهند که روش پیشنهادی در مقایسه با روش‌های [۴۸]، [۵۰] و [۶۰] روی مدل‌های با تغییر شکل‌های حرکتی و غیرصلب و موارد غیرایزومتریک به نتایج بهتری در دقت و کارایی دست پیدا می‌کند.

## واژه‌های کلیدی

تناظریابی اشکال سه بعدی،  
آشکارساز نقاط برجسته،  
توصیفگر فاصله ژئودزیک،  
مسئله تخصیص خطی با الگوریتم  
LAPJV،  
تغییر شکل غیرایزومتریک.

## ۱- مقدمه

یکی از اساسی‌ترین کارهایی که در تحلیل اشکال سه‌بعدی در نظر گرفته می‌شود، یافتن نقاط متناظر بین دو یا چند شکل معین است. به عبارت دیگر، هدف اصلی مسئله تناظریابی پیدا کردن یک رابطه معنادار (نگاشت) بین عناصر اشکال داده شده است. تعیین اینکه چه تطابقی معنادار است به کار مورد نظر بستگی دارد. این کار می‌تواند از موارد ساده‌تر، شناسایی قسمت‌هایی از اشکال که از نظر هندسی مشابه است تا مسایل پیچیده‌تر، ارتباط بین عناصری از اشکال که بخش‌های یکسانی را نشان می‌دهند؛ متغیر باشد. البته ممکن است تکه‌های تطبیق به‌طور قابل توجهی از نظر هندسه، ساختار تکه در کل شکل یا توپولوژی متفاوت باشند. در شکل ۱ نمونه‌ای از چنین مسئله‌ای در تناظریابی نشان داده شده است. به‌طور کلی، محاسبه تناظرهای بین اشکال سه‌بعدی چالش‌برانگیز است، زیرا نیازمند درک عمیق ساختار اشکال و رفتار قطعات آن‌ها در مقیاس محلی و کلی (جهانی) است تا بتوان تناظرهای معناداری برقرار کرد. با وجود پیچیدگی ذاتی این مسئله، تناظریابی اشکال سه‌بعدی نقشی اساسی در کاربردهای متنوع پردازش هندسی ایفا می‌کند [۱]. از سوی دیگر، شناسایی خودکار و دقیق تناظرها بین دو یا چند شکل همچنان چالش مهمی است که بستری برای تحلیل‌های پیشرفته‌تر و کاربردهای گسترده‌تر در حوزه‌های مختلف را فراهم می‌کند. از این رو، تطبیق بین اشکال سه‌بعدی عملیاتی بنیادین در بسیاری از الگوریتم‌های گرافیک کامپیوتری و پردازش هندسی از جمله درونیابی اشکال<sup>۱</sup>، بازسازی شکل<sup>۲</sup>، انتقال بافت<sup>۳</sup>، بازیابی شکل<sup>۴</sup>، انتقال بخش‌ها<sup>۵</sup>، هم‌ترازی داده‌های اسکن سه‌بعدی<sup>۶</sup>، انتقال تغییرات شکل<sup>۷</sup>، آشکارسازی تقارن<sup>۸</sup>، آشکارسازی تغییرات<sup>۹</sup> و مدل‌سازی آماری<sup>۱۰</sup> محسوب می‌شود [۲].



شکل ۱. یک مثال از مسائل چالشی در تناظریابی برای مجموعه‌ای از اشکال (ظروف دست‌ساز انسان). اجزای تشکیل دهنده اشکال از نظر هندسی و تعداد تکه‌های تشکیل دهنده (نوع و تعداد دستگیره، گردنه، تکیه‌گاه، دسته کوتاه یا بلند و نحوه اتصال به همدیگر) با هم متفاوت هستند [۱].

در اکثر روش‌های تناظریابی، توصیفگرهای پیشنهادی مبتنی بر توزیع هستند که از هیستوگرام برای بازنمایی ویژگی‌های محلی مدل‌های سه‌بعدی استفاده می‌کنند [۳]. این ویژگی‌ها شامل خصوصیات مهم اشکال هستند که در برابر تبدیل‌های هندسی نظیر مقیاس‌پذیری، چرخش، تاب خوردگی ناشی از جابه‌جایی اشکال، تغییرات روشنایی، مات‌شدگی و نویز مقاوم هستند. به‌طور کلی، فرآیند تناظریابی شامل سه مرحله اصلی است: استخراج ویژگی‌ها، استفاده از توصیفگر مناسب و برقراری تناظر بین ویژگی‌ها [۴].

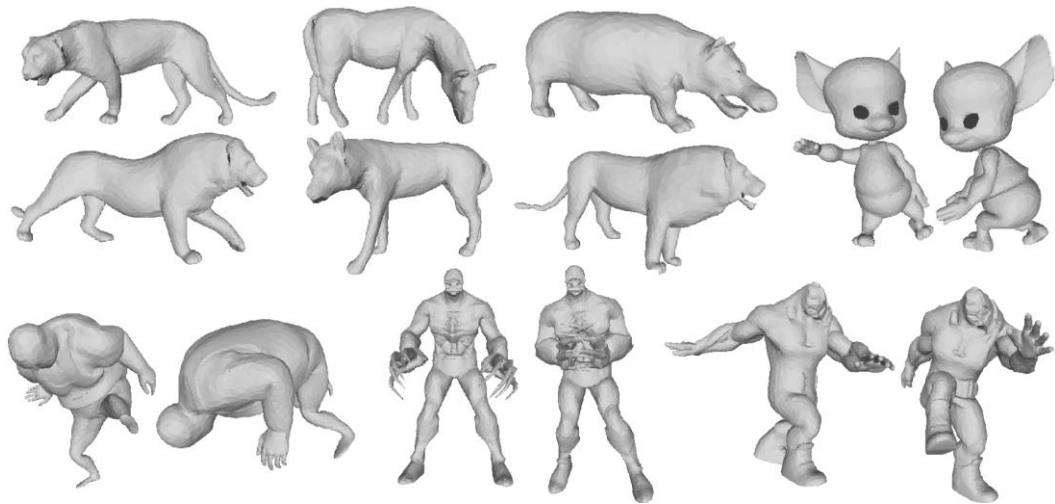
به‌طور سنتی مسئله تناظریابی در زمینه تجزیه و تحلیل تصاویر و حجم‌ها مورد مطالعه قرار گرفته‌است، اما امروزه در گرافیک کامپیوتری و برای اشکال هندسی با شبکه‌های مثلثی یا مجموعه نقاط، به‌عنوان یک هدف پژوهشی مطرح است. مسائل تناظریابی

<sup>1</sup> Shape interpolation  
<sup>2</sup> Shape reconstruction  
<sup>3</sup> Texture transfer  
<sup>4</sup> Shape retrieval  
<sup>5</sup> Segmentation transfer  
<sup>6</sup> 3D scan alignment  
<sup>7</sup> Deformation transfer  
<sup>8</sup> Symmetry detection  
<sup>9</sup> Change detection  
<sup>10</sup> Statistical modeling

اشکال را می‌توان به انواع مختلفی طبقه‌بندی کرد. اما، تفاوت‌های قابل توجهی بین این مسائل وجود دارد که الزامات محاسباتی متفاوتی را برای حل آن‌ها ایجاد می‌کند. با وجود این تفاوت‌ها، همه این مسائل به هدف مشترکی، یعنی ایجاد نگاشتی معنادار از یک شکل به شکل دیگر، متمرکز هستند [۱]. به‌عنوان مثال، بر اساس مطالعات و بحث‌های ارائه شده در [۱] و روش معرفی شده در [۵]، مسئله بازیابی شکل ارتباط نزدیکی با تناظریابی اشکال دارد، زیرا می‌توان از تطابق عناصر (نظیر نقاط، وجه‌ها، نقاط ویژه و مشخصه‌های اسکلتی) برای سنجش شباهت بین دو شکل استفاده کرد.

روش‌های تناظریابی اشکال سه‌بعدی را می‌توان بر اساس معیارهای مختلفی از جمله سطح شباهت (کامل یا جزئی)، نوع پردازش شکل (جفتی یا مجموعه‌ای)، تراکم خروجی (پراکنده یا انبوه) و نوع تغییر شکل (ایزومتريک یا غیرایزومتريک) طبقه‌بندی کرد. با در نظر گرفتن این معیارها، فرآیند تطبیق بین اشکال سه‌بعدی به‌طور قابل توجهی پیچیده می‌شود. برای مثال، تناظریابی مبتنی بر تغییرات ایزومتريک ساده‌تر است، زیرا در این نوع تغییر شکل، فاصله‌های ژئودزیکی بین نقاط روی مش‌ها حفظ می‌شود. مفصل‌بندی، خمش و تبدیل‌های صلب نمونه‌هایی از تغییرات ایزومتريک هستند. در مقابل، تغییر شکل‌های غیرایزومتريک، مانند کشیدگی یا فشردگی، شباهت معنایی بین اشکال را حفظ می‌کنند، اما فواصل ژئودزیکی بین نقاط تغییر می‌یابد. اگرچه تناظریابی اشکال ایزومتريک به‌طور گسترده مورد مطالعه قرار گرفته است، ولی ممکن است استفاده از روش‌های مبتنی بر این سناریوها در موارد غیرایزومتريک عملکرد مطلوبی نداشته باشند. حتی با استفاده از روش‌های پیشرفته ارائه شده در [۶-۸]، دستیابی به عملکرد بهینه در سناریوهای غیرایزومتريک دشوار است. از سوی دیگر، انتخاب مجموعه داده‌ها نیز اهمیت بسزایی دارد، زیرا آن‌ها تحت تاثیر محدودیت‌ها و خطاهای مختلفی (نظیر نویز، خود انسدادی، همجوشی بین تکه‌ها) قرار دارند که به تکنیک‌های تصویر برداری از اشکال در دنیای واقعی و نوع روش‌های اسکن (تک منبعی یا چند منبعی) وابسته‌اند. این عوامل چالشی اضافی برای روش‌های تناظریابی اشکال ایجاد می‌کنند [۲]. یک چالش جدید زمانی پدید می‌آید که اشکال سه‌بعدی تحت تغییرات حرکتی شدید یا ترکیبی از حرکت (تغییر وضعیت) و تغییر شکل‌های غیرایزومتريک قرار گیرند. در چنین حالت‌هایی، هر چند ویژگی‌های غیرایزومتريک بین اشکال وجود دارد ولی فواصل ژئودزیکی در بخش‌هایی از آن‌ها به‌صورت تقریبی حفظ می‌شود. هدف اصلی این مطالعه، ارائه راه حلی مؤثر برای مواجهه با این چالش‌های پیچیده در تطبیق اشکال است. در شکل ۲، چالش‌های مختلف تطبیق بین اشکال سه‌بعدی به‌طور خلاصه نشان داده شده است.

در روش پیشنهادی، یک استراتژی کارآمد برای تطبیق مدل‌های سه‌بعدی بر اساس ویژگی‌های هندسی اشکال ورودی به کار گرفته شده است. روش پیشنهادی تنها نیازمند شناسایی اولین نقطه برجسته (نقطه عطف یا نقطه ویژه) مدل است. برای تعیین نقاط برجسته بعدی از نقاط برجسته قبلی استفاده می‌شود که منجر به کاهش بار محاسباتی روش می‌شود. با الهام از ساختار سیستم‌های موقعیت‌یابی ماهواره‌ای، ماتریس ویژگی‌های هر مدل به سادگی استخراج می‌شود.



شکل ۲. نمایشی از انواع چالش‌ها در تناظریابی اشکال سه‌بعدی.

در واقع، نقاط برجسته یا ویژه به عنوان نقاط مرجع در نظر گرفته می‌شوند و فاصله ژئودزیکی بین تمام جفت نقاط مدل و نقاط مرجع محاسبه می‌شود تا ماتریس ویژگی‌های مدل بر اساس توصیفگر ژئودزیکی به دست آید. برای دستیابی به یک رابطه صریح و تطبیق نهایی، استراتژی حل مسئله تخصیص خطی با الگوریتم LAPJV استفاده می‌شود که تابع هزینه آن اطلاعات ماتریس ویژگی مدل‌ها را در بر می‌گیرد. این استراتژی علاوه بر افزایش سرعت تطبیق، منجر به شناسایی منحصر به فرد هنگام تعیین نقاط هم‌مکان بین مدل‌ها می‌شود. زیرا، برخلاف الگوریتم‌های تکراری مانند  $k$  نزدیک‌ترین همسایه (KNN) یا نزدیک‌ترین نقاط تکراری (ICP) که ممکن است چندین نقطه متناظر در مدل هدف برای یک نقطه در مدل منبع پیدا کنند، روش پیشنهادی تضمین می‌کند که هر نقطه در مدل منبع مربوط به یک نقطه منحصر به فرد در مدل هدف است. روش پیشنهادی یک راه حل مؤثر برای چالش جدید در مسئله تطبیق شکل ارائه می‌دهد و عملکرد بهینه و پیشرفته‌ای را برای اشکال غیر صلب با تغییرات حرکتی شدید و موارد غیر ایزومتریک در مقایسه با سایر رویکردهای مشابه ارائه می‌دهد.

بقیه مقاله به شرح زیر سازماندهی شده است. در بخش ۲، برخی از مهمترین کارهای مربوط به تناظریابی بین اشکال سه‌بعدی بررسی شده است. روش پیشنهادی به تفصیل در بخش ۳ توضیح داده شده است. بخش ۴، به جزئیات پیاده‌سازی روش پیشنهادی اختصاص داده شده است. در بخش ۵، آزمایش و واکاوی نتایج روش پیشنهادی روی دو مجموعه داده استاندارد با خصوصیات مختلف به صورت کمی و کیفی در مقایسه با روش‌های پیشرفته مورد بحث قرار گرفته است. در نهایت، نتیجه‌گیری روش پیشنهادی در بخش ۶ ارائه شده است.

## ۲- کارهای مرتبط

تناظریابی اشکال سه‌بعدی یک حوزه تحقیقاتی شناخته شده‌ای است که سوابق موفقیت آمیز خوبی دارد و راهکارهای مختلفی برای حل چالش‌های آن اعم از تطبیق شکل ایزومتریک، غیر صلب یا غیر ایزومتریک ارائه شده است و مرور کلی تکنیک‌های مرتبط فراتر از محدوده این مقاله است. بنابراین، به بررسی و مطالعه آثاری تمرکز می‌شود که بیشترین ارتباط را با روش پیشنهادی دارند،

به‌ویژه روش‌هایی که بر تطبیق ویژگی‌های هندسی و توصیفگرهای هندسی مقاوم در برابر تغییرات شکل مدل‌ها استوار هستند. البته، خواننده علاقه‌مند می‌تواند برای مطالعه جامع‌تر در این زمینه به بررسی‌های اخیر در تناظریابی اشکال [۹، ۱۰، ۱۱] مراجعه نماید.

رویکردهای تطبیق ویژگی<sup>۱</sup>: یکی از اساسی‌ترین روش‌ها برای تناظریابی بین اشکال، تخمین شباهت‌های بین عناصر یا ویژگی‌های خاصی از آنهاست که به عنوان رویکردهای تطبیق ویژگی یاد می‌شود. عناصر هر شکل اغلب توسط توصیفگرهای شکل تعریف می‌شوند و تناظرها با انتساب و بهینه‌سازی این توصیفگرها از طریق یک تابع هدف به دست می‌آیند. این تابع شامل به حداکثر رساندن شباهت بین توصیفگرهای مناظر و در عین حال به حداقل رساندن اعوجاج ناشی از تغییرات شکل است. در واقع، مسئله تناظریابی را می‌توان در قالب یک مسئله کمینه‌سازی بیان کرد که به طور موثری با استفاده از روش‌های تخصیص خطی قابل حل است. تطبیق ویژگی‌ها را می‌توان در زمینه‌های مختلفی که امکان محاسبه مجموعه‌ای از توصیفگرها برای عناصر اشکال وجود دارد، اعمال کرد و می‌تواند به عنوان مبنایی برای ایجاد تطابق اولیه در سایر رویکردها عمل کند. از جمله کاربردهای آن می‌توان به ثبت اسکن‌های سه‌بعدی، تغییر شکل سطوح و تطبیق اسکلتی اشاره کرد. علاوه بر این، استفاده از مدل‌های پراکنده<sup>۲</sup> برای تطبیق اشکال جزئی ایزومتریک در سطوح مترام<sup>۳</sup> [۱۱] رویکردی است که با تعداد محدودی از ویژگی‌های هندسی می‌خواهد به بهبود کارایی تطابق در سناریوهای پیچیده شامل تغییر شکل‌های محلی یا تغییرات هندسی، کمک کند. تجزیه و تحلیل مبتنی بر ویژگی برای بسیاری از وظایف پردازش شکل با نقاط ویژه که توسط توصیفگرهای محلی شناسایی می‌شوند، یک امر اساسی است. این توصیفگرها اغلب نواحی مورد علاقه را در اطراف نقاط منفرد تعریف می‌کنند. اما، استفاده از این نواحی می‌تواند تطابق جزئی را پیچیده کند. زیرا ممکن است به خوبی با هندسه قطعات شکل هماهنگ نباشند. روش ارائه‌شده در [۱۲] تکنیکی برای نگاشت دوطرفه معرفی می‌کند که در آن توصیفگر ناحیه مورد نظر با استفاده از دو نقطه ویژه تعریف می‌شود. این روش با تطبیق شکل ناحیه هدف، تناظریابی جزئی را تسهیل می‌کند و با نادیده گرفتن نواحی غیر ضروری بر اساس ویژگی‌های تطبیقی نگاشت دوطرفه، نگاشت حاصل را تا حدی در برابر تغییرات توپولوژیکی مقاوم می‌کند. تطبیق ویژگی‌ها اغلب به نشانه‌ها، نقاط کلیدی<sup>۴</sup> یا ویژگی‌های متمایزی از سطح شی متکی است که به عنوان نقاط مرجع برای مقایسه و تراز کردن اشکال سه‌بعدی به کار می‌روند. با شناسایی و تطبیق این نقاط بین دو یا چند شکل سه‌بعدی می‌توان شباهت‌ها، تفاوت‌ها و روابط بین آنها را تجزیه و تحلیل کرد که به رویکردهای مبتنی بر تطبیق ویژگی و تناظریابی پراکنده کمک می‌کند. در رویکردهای مبتنی بر نگاشت تابعی، نقاط کلیدی به‌عنوان قیدهای ویژه برای رفع ابهام تقارن استفاده می‌شوند [۱۴، ۱۳]. روش‌های متعددی از نشانه‌های نقطه‌ای استفاده می‌کنند که ممکن است به‌صورت دستی توسط کاربران تعریف شوند [۱۵] یا به‌طور خودکار محاسبه گردند [۱۶] یا حتی به محدودیت‌های منحنی [۱۷] گسترش یابند. این تکنیک‌ها با اتکا بر استراتژی‌های حفظ توصیفگرهایی مانند هسته حرارتی<sup>۵</sup> [۱۸] یا نگاشت‌های هسته موج<sup>۶</sup> [۱۹] و تمرکز بر کمینه‌سازی مربعات خطا در طول بهینه‌سازی به تطبیق نشانه‌ها دست می‌یابند. روش‌های تطبیق مبتنی بر نقاط کلیدی در سایر چارچوب‌های تناظریابی از جمله روش‌های مبتنی بر هم‌ترازی شکل بیرونی تحت قیدهای معین [۲۰-۲۲]، جاسازی اشکال در یک حوزه پارامتری مشترک [۲۳-۲۷]، پارامترسازی متقابل سطوح [۲۸]، کمینه‌سازی اعوجاج [۲۹] یا بهینه‌سازی مستقیم انرژی متقارن دیریکله [۳۰] برای حفظ ویژگی‌های

<sup>1</sup> Feature Matching Approaches

<sup>2</sup> Sparse

<sup>3</sup> Dense

<sup>4</sup> Landmark or Key points

<sup>5</sup> Heat Kernel Signature

<sup>6</sup> Wave Kernel Maps

متمايز (نشانه‌ها) نیز مورد بررسی قرار گرفته است. تکنیک‌های اخیر می‌توانند به نتایج دقیقی در تناظریابی منجر شوند. اما، اغلب از نظر محاسباتی سنگین بوده و قیدهای توپولوژیکی را در فرآیند تناظریابی تحمیل می‌کنند. یکی از جنبه‌های مهم رویکردهای مبتنی بر ویژگی، انتخاب ویژگی‌های مناسب است. بسیاری از مطالعات نظیر [۳۱] از توابع ویژه عملگر لاپلاس بلترامی<sup>۱</sup> استفاده می‌کنند که برای نمایش توابع صاف با تغییرات محدود بهینه هستند [۳۲]. با این حال، ماهیت کلی پایه‌های لاپلاس بلترامی کل شکل را در تحلیل ویژگی‌ها در نظر می‌گیرد و ممکن است به‌طور کامل با تغییرات شکل غیرایزومتريک سازگار نباشد. برای رفع این محدودیت، حالت‌های مینفولد فشرده [۳۳] معرفی شدند تا پراکندگی و محلی بودن را در ساخت پایه‌ها افزایش دهند. این رویکرد، به جای در نظر گرفتن کل شکل به صورت یکپارچه بر شناسایی و استفاده از اطلاعات محلی و مرتبط تمرکز دارد و استخراج ویژگی‌های شکل را بهبود می‌بخشد. با ترویج پراکندگی (وجود تعداد محدودی از عناصر غیرصفر) و محلی بودن (تمرکز بر نقاط نزدیک)، پایه‌های لاپلاس بلترامی می‌توانند به‌طور موثرتری برای ثبت تغییرات غیرایزومتريک تنظیم شوند. به همین منظور، عملگر همیلتونی<sup>۲</sup> [۳۴] برای استخراج ویژگی‌های محلی موثر معرفی شد. همچنین، روش‌هایی با ترکیب پایه‌های لاپلاس بلترامی و ویژگی‌های هندسی ارائه شده‌اند که انعطاف‌پذیری بیشتری فراهم می‌کنند [۳۵-۳۷] و نگاهی به تناظریابی را بهبود می‌بخشند. اما، این روش‌ها اغلب برای اشکال تقریباً ایزومتريک طراحی شده‌اند و فقط محدودیت‌های مربوطه را برآورده می‌کنند. توصیف قدرتمندی از هندسه اشکال از طریق هم‌ترازی مقادیر ویژه لاپلاسی بین اشکال غیرایزومتريک در [۳۸] معرفی شده است. در واقع، هم‌ترازی طیفی به صورت ذاتی دو شکل را ایزومتريک می‌کند و از این رو، می‌تواند تطبیق دقیق را با استفاده از روش‌های ایزومتريک موجود [۴۰، ۳۹] تسهیل کند. رویکردهای تطبیق توصیفگرها: روش دیگری برای تناظریابی، استفاده از شباهت بین توصیفگرهای عناصر اشکال است که می‌تواند از طریق تطبیق نقطه‌ای دستی [۴۱، ۴۲] یا خودکار [۴۳، ۴۴] حاصل شود. تطبیق بهینه ممکن است از توصیفگرهای نقطه به نقطه مانند توصیفگرهای فاصله [۴۵، ۴۶] یا توصیفگرهای شات<sup>۳</sup> [۴۷] استفاده کند. در روش‌های مبتنی بر شباهت، متغیرهای هندسی یا توصیفگرها می‌توانند تحت یک مدل تغییر شکل یافته محاسبه شوند که به صورت عبارات نقطه‌ای (روی رئوس) یا عبارات زوجی (بین جفت رئوس) تعریف می‌شوند. عبارات زوجی در این میان مؤثرتر هستند. زیرا، ترم‌های نقطه‌ای به محدودیت‌ها و ویژگی‌های فردی نقاط اشاره دارند و شباهت یا عدم شباهت بین نقاط متناظر را نشان می‌دهند. در حالی که ترم‌های زوجی روابط بین جفت نقاط را رمزگذاری کرده و اطلاعات مکانی یا ساختاری را ثبت می‌کنند. ترکیب این توصیفگرها به ایجاد یک تابع انرژی منجر می‌شود که با کمینه‌سازی آن، تطبیق مورد نظر را حاصل می‌شود و رویکردی دقیق‌تر و مقاوم‌تر برای حل مسائل تناظریابی فراهم می‌کند، در نهایت منجر به بهبود نتایج می‌شود [۱۰]. انتخاب توصیفگر مناسب به نوع تغییر شکل بستگی دارد. برای مثال در تغییرات ایزومتريک، استفاده از فواصل ژئودزیکی مناسب است. زیرا این فواصل بین جفت نقاط روی سطح اشکال ایزومتريک حفظ شده و فرآیند تطبیق را تسهیل می‌کنند. به عنوان نمونه در مطالعه [۴۸]، GDD<sup>۴</sup> یک توصیفگر فاصله ژئودزیکی معرفی شده است که فواصل ژئودزیکی را به صورت ترکیبی خطی از توابع پایه کدگذاری می‌کند. این رویکرد یک پایه فاصله ژئودزیکی را تعریف می‌کند که برای تقریب فشرده فاصله‌های ژئودزیکی با استفاده از نرم فروبینوس بهینه‌سازی شده و نمایش دقیق‌تری ارائه می‌دهد. در واقع، تناظریابی را می‌توان

<sup>1</sup> Laplace-Beltrami Operator

<sup>2</sup> Hamiltonian Operator

<sup>3</sup> Signature of Histograms of Orientations (SHOT)

<sup>4</sup> Geodesic Distance Descriptors

با مقایسه توصیفگرهای فاصله ژئودزیکی اشکال از طریق روش‌های جستجوی نزدیکترین همسایه مانند الگوریتم ICP<sup>۱</sup>، بدون نیاز به روش‌های برش یا سست‌سازی انجام داد. این عملیات نشان‌دهنده رویکردی مستقیم برای تطبیق اشکال بر اساس نمایش‌های GDD آن‌ها است.

روش‌های نگاشت‌های تابعی<sup>۲</sup>: نگاشت‌های تابعی معرفی شده در [۴۹]، مسئله تناظریابی را به صورت نگاشتی بین توابع تعریف شده روی سطوح، به جای نگاشت مستقیم نقاط سطح، مدل‌سازی می‌کنند که رویکردی بسیار مؤثر است. مزیت اصلی این روش، کاهش قابل توجه ابعاد مسئله تطبیق است، زیرا از پایه‌های ویژه عملگر لاپلاس بلترامی برای نمایش این توابع استفاده می‌شود. با گذشت زمان، مفهوم نگاشت‌های تابعی برای کاربردهای مختلف بهبود یافته [۵۰-۵۳] و به تازگی در قالب یادگیری عمیق ادغام شده است [۵۵، ۵۴]. برخلاف رویکردهای سنتی مبتنی بر توصیفگر، این روش‌ها بر بهینه‌سازی توابعی تمرکز دارند که در فضایی با ابعاد پایین‌تر نسبت به تعداد رئوس (نقاط) اشکال، تجزیه و تحلیل و نمایش داده می‌شوند. پس از محاسبه نگاشتهای تابعی، تناظرهای بین رئوس با استفاده از روش‌های مختلف [۴۹] استخراج می‌شوند که با برجسته‌سازی شباهت‌ها و تفاوت‌ها در هندسه اشکال، مقایسه دقیق‌تری را امکان‌پذیر می‌کنند. یک استراتژی رایج برای بهبود عملکرد تناظریابی، اصلاح نگاشت‌های تابعی است که اغلب از تکنیک ICP برای تبدیل نگاشت‌های تابعی به نقطه‌ای استفاده می‌کند. در ادامه، بهینه‌سازی نگاشت‌ها از طریق کمیته‌سازی یک تابع انرژی [۵۶-۵۸]، انجام تناظریابی مؤثر با شرط دوطرفه بودن نگاشت به عنوان یک الزام اساسی [۵۹]، افزایش وضوح طیفی نگاشت‌های تابعی در طول پالایش [۶۰] و تجزیه و تحلیل رابطه بین نگاشت‌های تابعی و نقطه‌ای با ارائه روش اصلاحی مبتنی بر هم‌ترازی طیفی [۶۱] معرفی شده‌اند. با این حال، روش‌های دو مرحله‌ای تطبیق و پالایش به دلیل احتمال خطا در تعیین نگاشت‌های تابعی اولیه، اغلب عملکرد کمتر از حد مطلوب دارند. در سال‌های اخیر، محققان به‌طور فزاینده‌ای بر روش‌های یادگیری عمیق برای نگاشت‌های تابعی تمرکز کرده‌اند. از سال ۲۰۱۷ مطالعات متعددی نگاشت‌های تابعی عمیق را معرفی کرده‌اند، از جمله شبکه‌های عمیق نظارت شده با نگاشت تابعی موسوم به FMNet<sup>۳</sup> [۶۲]، نسخه‌های بدون نظارت FMNet [۶۳] و شبکه‌های یادگیری عمیق DUO-FMNet<sup>۴</sup> [۶۴] که هدف اصلی این رویکردها، یادگیری مستقیم ویژگی‌ها از داده‌های آموزشی است.

### ۳- روش پیشنهادی

با وجود پیشرفت‌های قابل توجه در زمینه تناظریابی اشکال، تطبیق بین مدل‌های غیرایزومتریک همچنان چالشی اساسی است. مطالعات نشان می‌دهد که دشوارترین حالت در تطبیق اشکال سه‌بعدی زمانی رخ می‌دهد که اشکال از نظر معنایی به یک کلاس تعلق داشته باشند، اما لازم نیست که ایزومتریک باشند. در چنین مواردی، الگوریتم تناظریابی باید قادر به شناسایی و ثبت ویژگی‌های معنادار در هر دو شکل باشد و همزمان اعوجاج محلی را کاهش دهد تا نتایجی با کیفیت بالا ارائه کند. بررسی‌ها حاکی از آن است که با وجود پیشرفت سریع روش‌های نگاشت‌های تابعی مبتنی بر یادگیری عمیق، رویکردهای بدون نظارت موجود بیشتر بر تطبیق اشکال نزدیک به ایزومتریک تمرکز دارند یا در مقایسه با روش‌های نظارت شده در تطبیق اشکال غیرایزومتریک با شکاف‌های

<sup>1</sup> Iterative Closest Point Algorithm

<sup>2</sup> Functional Map Methods

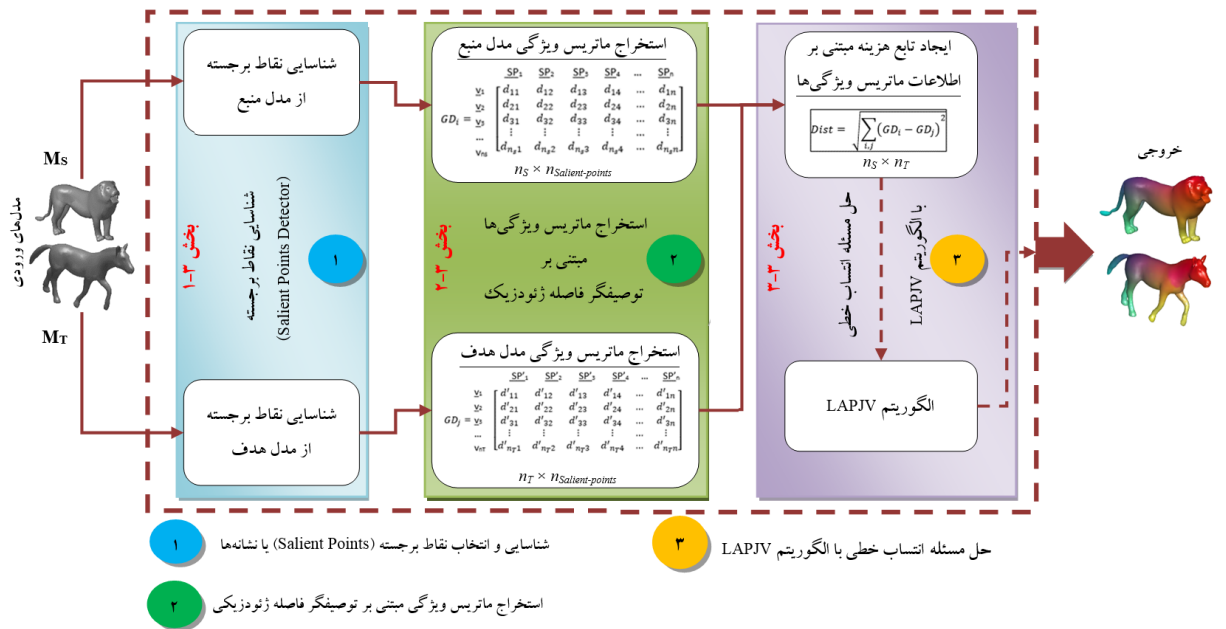
<sup>3</sup> Functional Map Networks

<sup>4</sup> Deep Orientation-aware Functional Map Networks

عملکردی قابل توجهی مواجه هستند [۶۵]. در این مقاله، تلاش شده است تا راه‌حلی موثر برای تطبیق اشکال سه‌بعدی با تغییرات حرکتی شدید (غیر صُلب) یا مدل‌هایی که به‌طور هم‌زمان شامل تغییر موقعیت و تغییر شکل غیرایزومتریک هستند، ارائه شود. رویکرد پیشنهادی ارتباط نزدیکی با روش‌های مبتنی بر تطبیق ویژگی‌ها و توصیفگرها دارد و به‌طور مستقیم نداشت‌های نقطه‌ای را تولید می‌کند که تا حدی بهینه بوده و بر حفظ نقاط برجسته در حین محاسبه نداشت کلی تأکید دارد. هدف، دستیابی به تطبیق نقطه‌ای با کیفیت بالا بین دو شکل سه‌بعدی، یعنی شکل منبع ( $M_s$ ) و شکل هدف ( $M_T$ )، است که به‌صورت مش‌های مثلثی چند وجهی (منیفولد) با تعداد رئوس  $n_s$  و  $n_T$  (تعداد نقاط معلوم) در دسترس هستند. روش پیشنهادی شامل سه بخش اصلی است:

- (۱) شناسایی نقاط برجسته (نقاط ویژه) اشکال ورودی
- (۲) استخراج ماتریس ویژگی مدل‌ها: بر اساس توصیفگر فاصله ژئودزیک و نقاط برجسته استخراج شده
- (۳) استراتژی حل مسئله تخصیص خطی با الگوریتم LAPJV<sup>۱</sup> برای تطبیق نهایی

روش پیشنهادی روی مجموعه داده‌های پنج مارک متنوع غیر صُلب و غیرایزومتریک ارزیابی شده و نتایج آن با رویکردهای مشابه مبتنی بر تطبیق ویژگی با توصیفگر ژئودزیک و نداشت‌های تابعی مقایسه شده است. روش پیشنهادی بهبود قابل توجهی در تطبیق اشکال سه‌بعدی غیر صُلب و غیرایزومتریک نسبت به روش‌های رقابتی (که در ادامه مقایسه خواهند شد) ایجاد کرده و به کاهش پیچیدگی محاسباتی، افزایش سرعت و بهبود کارایی تطبیق منجر شده است. بلوک دیاگرام و طرح کلی روش پیشنهادی، شامل تعاملات و روابط بین اجزای مختلف در شکل ۳ ارائه شده است. در ادامه، جزئیات کامل اجرای هر یک از مراحل روش پیشنهادی به‌طور جامع شرح داده شده است.



شکل ۳. بلوک دیاگرام و طرح کلی روش پیشنهادی برای تناظریابی بین اشکال سه‌بعدی.

<sup>1</sup> Linear Assignment Problem solver with Junker Volgenant algorithm (LAPJV)

### ۱-۳ - شناسایی نقاط برجسته (نقاط ویژه) اشکال ورودی

بر اساس تحلیل ادراک انسانی در حل مسئله تطبیق، می‌توان نقاطی با ویژگی‌های برجسته و متناظر در هر مدل سه‌بعدی شناسایی کرد که به صورت شهودی قابل فهم هستند. این نقاط که در نواحی با تغییرات انحنا قوی و پایداری محلی قرار دارند، اغلب روی تفرع‌ها و تحدب‌های اشکال واقع شده‌اند [۶۶]. دقت وجوه مثلثی در این نقاط باید بیشتر باشد، به همین دلیل این نواحی از مثلث‌های کوچک‌تر تشکیل می‌شوند. این نقاط به‌عنوان ماکزیمم‌های محلی یک تابع تعریف شده روی سطوح عمل می‌کنند که ویژگی‌های مختلف شکل را توصیف کرده و تغییرات محلی آن را نشان می‌دهد که برای ادراک انسانی اهمیت ویژه‌ای دارد. یکی از ویژگی‌های این نقاط، فاصله زیاد آن‌ها از یکدیگر است، به طوری که نسبت به سایر نقاط مدل، بیشترین فاصله ژئودزیکی را دارند. با توجه به این خصوصیات، این نقاط به‌عنوان نقاط برجسته یا ویژه شناخته می‌شوند. استفاده از نقاط برجسته در توصیف ویژگی‌های مدل‌های سه‌بعدی برای الگوریتم‌های تطبیق شکل مفید است، زیرا این نقاط نمایش فشرده‌ای ارائه داده و نسبت به تبدیل‌های هندسی مقاوم هستند. روش پیشنهادی با الهام از ساختار سیستم‌های موقعیت‌یابی ماهواره‌ای و استفاده از این نقاط به‌عنوان نقاط مرجع، قادر به تعیین دقیق نقاط هم‌مکان بین مدل‌ها است. نقاط هم‌مکان، نقاطی روی مدل هستند که فاصله یکسانی از نقاط برجسته مربوطه دارند. در روش پیشنهادی، زیر مجموعه‌ای از نقاط هر مدل با استفاده از استراتژی نمونه‌برداری دورترین نقطه مبتنی بر فاصله ژئودزیکی شناسایی می‌شوند. این روش با بهره‌گیری از الگوریتم Fast Marching [۶۷]، فواصل ژئودزیکی نقاط را محاسبه کرده و تعدادی از آن‌ها را که در قسمت‌های مختلف مدل دارای بیشترین فاصله ژئودزیکی هستند، انتخاب می‌کند. اما، محاسبه فاصله ژئودزیکی بین تمام جفت نقاط به افزایش پیچیدگی محاسباتی منجر می‌شود. برای رفع این مشکل، می‌توان میانگین فاصله ژئودزیکی،  $AGD^1$ ، بین تعداد محدودی از نقاط مدل را محاسبه و از آن برای شناسایی نقاط برجسته استفاده کرد. در روش پیشنهادی، معیار انتخاب نقاط ویژه به صورت تکراری و بر اساس استراتژی نمونه‌برداری دورترین نقطه از سایر نقاط مش انجام می‌شود. این فرآیند با انتخاب یک نقطه تصادفی روی مدل آغاز شده و تا شناسایی  $p_s$  نقطه ویژه ادامه می‌یابد. ابتدا، میانگین فاصله‌های ژئودزیکی بین نقاط مش از یک نقطه تصادفی محاسبه شده و نقطه با بیشترین مقدار فاصله به‌عنوان اولین نقطه برجسته (نقطه ویژه) تعیین می‌شود. برای شناسایی دومین نقطه برجسته، فواصل ژئودزیکی بین اولین نقطه ویژه و سایر نقاط مدل محاسبه شده و نقطه‌ای با بیشترین فاصله ژئودزیکی به‌عنوان نقطه برجسته دوم انتخاب می‌شود. الگوریتم پیشنهادی به همین ترتیب تکرار می‌شود تا نقاط ویژه بعدی استخراج شوند. در واقع، روش پیشنهادی از مجموعه نقاط برجسته قبلی برای یافتن نقطه ویژه بعدی استفاده می‌کند و این فرآیند تا رسیدن به تعداد مورد نظر نقاط ویژه،  $p_s$  ادامه می‌یابد. این رویکرد با هدف ارائه تقریب دقیقی از میانگین فاصله ژئودزیکی با پیچیدگی محاسباتی کمتر طراحی شده است به طوری که نیازی به محاسبه فواصل بین تمام جفت نقاط مدل ندارد. انتخاب مقدار  $p_s$  از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است، زیرا مقادیر بزرگ  $p_s$  تعداد نقاط مورد استفاده در تقریب را افزایش داده و در نتیجه پیچیدگی محاسباتی را بالا می‌برد. در مقابل، انتخاب مقادیر کوچک برای  $p_s$ ، تعداد نقاط محدودی را در فرآیند تقریب دخیل می‌کند که ممکن است به دلیل کمبود اطلاعات کافی درباره شکل، منجر به تخمین نادرست فاصله شود. در روش پیشنهادی با توجه به ساختار توپولوژیکی اشکال ورودی و نتایج آزمایش‌ها، مقدار  $p_s$  برابر با ۱۶ انتخاب شده است. بر اساس فرض اولیه، هر یک از اشکال سه‌بعدی به صورت یک منی‌فولد در نظر

<sup>1</sup> Average Geodesic Distance

گرفته می‌شود. یک منی فولد یا یک شبکه چند وجهی مثلثی به‌عنوان مجموعه‌ای از رئوس، وجوه و یال‌های همسایگی مرتبه اول رئوس یا لبه‌ها تعریف شده و با نماد  $M = \{V, F, E\}$  نشان داده می‌شود. این المان‌ها مطابق با معادله (۱) تعریف می‌شوند.

$$\begin{aligned} V &= \{v_i \mid v_i \in \mathcal{R}^3, 1 < i \leq n\} \\ F &= \{f_{ijk} = (v_i, v_j, v_k) \mid v_i, v_j, v_k \in V, i \neq j \neq k\} \\ E &= \{e_{ij} = (v_i, v_j) \mid v_i, v_j \in V, i \neq j\} \end{aligned} \quad (1)$$

در رابطه (۱)،  $V$  مجموعه رئوس،  $F$  مجموعه وجوه و  $E$  مجموعه یال‌های همسایگی مرتبه اول رئوس برای یک مش با  $n$  رأس را نشان می‌دهند. برای شناسایی نقاط برجسته از میانگین فاصله ژئودزیکی، AGD، استفاده می‌شود که تقریبی از آن طبق رابطه (۲) محاسبه می‌شود.

$$AGD = f(v) \approx \frac{1}{n_{ps}} \sum_{i=1}^{n_{ps}} D_{Geodesic}(v, p_i) \quad (2)$$

در رابطه (۲)،  $n_{ps}$  تعداد نقاط تصادفی،  $v$  رئوس و  $p_i$  هر نقطه تصادفی روی مش مثلثی را نشان می‌دهد. اولین نقطه برجسته مدل با تعیین حداکثر مقدار تابع میانگین فاصله ژئودزیکی AGD طبق رابطه (۳) تعیین می‌شود.

$$sp_1 = \underset{v \in V}{\text{Argmax}}(AGD(v)) \quad (3)$$

در رابطه (۳)،  $sp_1$  اولین نقطه برجسته مدل را نشان می‌دهد که در واقع اندیس رأسی از مدل را مشخص می‌کند. در الگوریتم پیشنهادی، پس از شناسایی اولین نقطه برجسته، استخراج نقاط ویژه بعدی به سادگی انجام می‌شود. به‌طور کلی، استراتژی استفاده از نقاط ویژه قبلی برای یافتن نقطه ویژه بعدی در نظر گرفته می‌شود. برای شناسایی نقاط برجسته (ویژه) هر مدل از رابطه (۴) استفاده می‌شود.

$$sp_m = \underset{v \in V}{\text{Argmax}}(\min(D_{Geodesic}(v, sp_1), D_{Geodesic}(v, sp_2), \dots, D_{Geodesic}(v, sp_{m-1}))) \quad (4)$$

در رابطه (۴)،  $sp_1, sp_2, sp_3, \dots, sp_{m-1}$  نقاط برجسته (ویژه) شناسایی شده و  $v$  رئوس مش مثلثی هستند که برای شناسایی نقطه ویژه جدید،  $sp_m$ ، استفاده می‌شوند. در واقع، فواصل ژئودزیکی هر راس مش ( $v$ ) از نقاط ویژه شناسایی شده ( $sp_{m-1}$ ) محاسبه شده و کمینه این فاصله‌ها انتخاب می‌شود. سپس از میان نقاط با کمینه فواصل، نقطه‌ای که دارای بیشترین فاصله ژئودزیکی است به‌عنوان نقطه برجسته (ویژه) جدید انتخاب می‌شود. استفاده از الگوریتم نمونه‌برداری دورترین نقطه، احتمال انتخاب نقاط نزدیک به نقاط برجسته قبلی را کاهش می‌دهد، زیرا این نقاط به دلیل همسایگی با نقاط برجسته قبلی فواصل کمتری دارند. این رویکرد از انتخاب چندین نقطه برجسته در یک ناحیه از مدل جلوگیری کرده و تضمین می‌کند که نقاط انتخاب شده، دورترین نقاط نسبت به یکدیگر باشند. در نتیجه نقاط برجسته در نواحی متمایز و برجسته‌تر مدل قرار می‌گیرند. الگوریتم مورد استفاده برای استخراج نقاط برجسته (نقاط ویژه) در الگوریتم ۱ خلاصه شده است. پس از شناسایی این نقاط، یک تطبیق اولیه پراکنده بین آن‌ها برقرار می‌شود. برای این منظور، می‌توان از روش‌های دستی یا خودکار مانند توصیفگرهای HKS [۱۸] یا WKS [۱۹] استفاده کرد. از آنجا که تطبیق با این ابزارها می‌تواند زمان‌بر بوده و طول مدت تطابق متراکم را طولانی‌تر کند؛ تطبیق اولیه به‌صورت دستی و بر اساس شهود انسانی و ادراک بصری برقرار می‌شود.

## الگوریتم ۱: الگوریتم استفاده شده برای شناسایی نقاط برجسته از مدل ورودی

**ورودی‌ها:** - مدل‌های ورودی مرجع و هدف. (مش‌های مثلثی چندوجهی مجموعه‌ای از رأس‌ها، وجه‌ها و یال‌ها)

- تعداد نقاط برجسته مورد نیاز ( $N_{sp}$ )

**خروجی:** بردار نقاط ویژه مدل حاوی اندیس نقاط برجسته ( $F_p$ )

۱: انتخاب  $n$  نقطه تصادفی از مش ورودی. (در اینجا  $n=16$ )

۲: **حلقه for** با شمارنده ۱ تا تطبیق

۳: محاسبه فاصله ژئودزیک هر نقطه از همه نقاط روی مش با الگوریتم پیمایش سریع (Fast-Marching)

۴: **پایان حلقه for**

۵: محاسبه میانگین فواصل ژئودزیک  $(AGD \leftarrow \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n D_{Geodesic}(v, p_i))$

۶: شناسایی نقطه با بیشترین مقدار میانگین فاصله ژئودزیک به عنوان اولین نقطه برجسته .....  $(sp_1 \leftarrow \text{Argmax}_{v \in V}(AGD(v)))$

۷: شناسایی دومین نقطه برجسته مبتنی بر نقطه برجسته اول  $(sp_2 = \text{Argmax}_{v \in V}(D_{Geodesic}(v, sp_1)))$

۸: **حلقه for** با شمارنده ۳ تا  $N_{sp}$

۹: شناسایی نقاط بعدی مبتنی بر نقاط برجسته قبلی

$(sp_m = \text{Argmax}_{v \in V}(D_{Geodesic}(v, sp_1), D_{Geodesic}(v, sp_2), \dots, D_{Geodesic}(v, sp_{m-1})))$

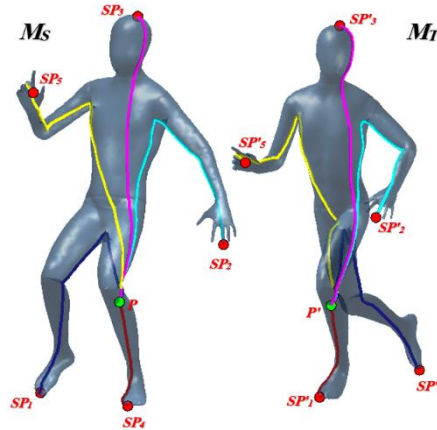
۱۰: **پایان حلقه for**

۱۱: استخراج اندیس نقاط برجسته به صورت یک بردار ویژگی ( $F_p$ )

## ۳-۲- استخراج ماتریس ویژگی مدل‌ها

روش پیشنهادی برای استخراج ویژگی‌های هر مدل از نقاط برجسته (نقاط ویژه) شناسایی شده استفاده می‌کند. این فرآیند با الهام از ساختار سیستم‌های موقعیت‌یابی جهانی، GPS، بر اساس محاسبه فواصل ژئودزیک تمام نقاط مدل از نقاط ویژه مربوطه انجام می‌شود. برای تعیین موقعیت هر نقطه مدل، فاصله ژئودزیک آن نقطه تا نقاط برجسته با استفاده از الگوریتم Fast Marching محاسبه می‌شود. این الگوریتم برای محاسبه کوتاه‌ترین مسیر یا فاصله ژئودزیک روی سطوح مختلف از جمله مش‌های مثلثی به کار می‌رود و به عنوان روشی برای محاسبه فاصله‌های ژئودزیک ریمانی عمل می‌کند، جایی که کوتاه‌ترین مسیر به صورت منحنی روی سطح نمایش داده می‌شود. بر این اساس، موقعیت هر نقطه فرضی  $p$  در مدل به صورت زیر تعیین می‌شود: مکان نقطه  $p$  نسبت به نقطه برجسته  $sp_1$ ، محیط کره‌ای به مرکز  $sp_1$  و شعاع فاصله ژئودزیک از نقطه  $p$  تا  $sp_1$  است. به همین ترتیب، مکان نقطه  $p$  نسبت به نقطه برجسته  $sp_2$ ، محیط کره‌ای به مرکز  $sp_2$  و به شعاع فاصله ژئودزیک از نقطه  $p$  تا  $sp_2$  تعیین می‌شود. با جمع‌آوری این اطلاعات، موقعیت نسبی نقطه  $p$  روی مدل مشخص می‌شود. به طور کلی، مکان جدید از تلاقی این کره‌ها به دست می‌آید که محل تقاطع آن‌ها دایره‌ای را تشکیل می‌دهد و نقطه  $p$  روی محیط این دایره قرار می‌گیرد. این فرآیند برای سایر نقاط برجسته نیز تکرار می‌شود. از نظر تئوری، موقعیت نقطه  $p$  با استفاده از سه نقطه برجسته (ویژه) قابل محاسبه است، اما برای دستیابی به دقت بالاتر، حداقل از چهار نقطه برجسته استفاده می‌شود. با افزایش تعداد نقاط برجسته، تقاطع کره‌ها به یک نقطه واحد همگرا می‌شود که مختصات مکانی دقیق آن نقطه را نشان می‌دهد. فواصل ژئودزیک بر اساس نگاشت  $d(v): V \rightarrow R$  محاسبه می‌شوند. در این مرحله، ماتریس ویژگی بر اساس

فواصل ژئودزیکی هر نقطه از نقاط برجسته با استفاده از الگوریتم ۲ محاسبه می‌شود. در شکل ۴ خروجی الگوریتم ۲ و نمایشی از برقراری تطبیق بین نقاط فرضی در مدل‌ها نشان داده شده است. به عبارت دیگر، شرط تطبیق نقطه فرضی  $p$  در مدل منبع با نقطه  $p'$  در مدل هدف این است که فواصل نقطه  $p$  از نقاط ویژه مدل منبع  $(sp_1, sp_2, sp_3, \dots, sp_m)$  برابر با فواصل نقطه  $p'$  از نقاط ویژه متناظر در مدل هدف  $(sp'_1, sp'_2, sp'_3, \dots, sp'_m)$  باشد. ابعاد ماتریس ویژگی هر شکل که با نماد **GD** نشان داده می‌شود، برابر با تعداد نقاط (رئوس) در تعداد نقاط ویژه هر شکل است. الگوریتم ۲ خلاصه‌ای از روش به کار رفته را ارائه می‌دهد.



شکل ۴. نمایشی از برقراری تناظر بین نقاط مدل‌ها بر اساس فاصله ژئودزیکی هر نقطه (مانند  $p$  و  $p'$ ) از نقاط ویژه مدل‌ها ( $m=5$ ).

## الگوریتم ۲: استخراج ماتریس ویژگی مدل‌های ورودی مبتنی بر فاصله‌های ژئودزیکی.

**ورودی‌ها:** - مدل‌های ورودی مرجع و هدف. (مش‌های مثلثی چندوجهی مجموعه‌ای از رأس‌ها، وجه‌ها و یال‌ها).

- زیرمجموعه‌ای از رئوس مش‌های ورودی  $S \subset V$

- در اینجا از نقاط برجسته (نقاط ویژه) تعیین شده استفاده می‌شود.

**خروجی:** ماتریس ویژگی مدل (ماتریس فاصله ژئودزیکی نرمالیزه، **GD**)

### مقداردهی اولیه داده‌ها

۱: تنظیم نقاط برجسته به عنوان نقاط شروع برای محاسبه فاصله‌های ژئودزیکی  $(pstarts \leftarrow \{sp_i\}_{i=1}^{N_{sp}})$

۲: انتخاب تنظیم تصادفی نقطه انتهایی ( $se$ ) برای ترسیم مسیرهای ژئودزیکی  $(N_{se} \leftarrow 2)$

### بدنه اصلی

۳: **حلقه for** با شمارنده ۱ تا  $\{sp_i\}_{i=1}^{N_{sp}}$

۴: محاسبه فاصله‌های ژئودزیکی با الگوریتم انتشار پیشرو **Fast Marching**

۵: نرمالیزه کردن فاصله‌های ژئودزیکی محاسبه شده

۶: **پایان حلقه for**

۷: استخراج ماتریس ویژگی هر مدل (ماتریس فاصله ژئودزیکی نرمالیزه، **GD**)

## ۳-۳ - استراتژی حل مسئله تخصیص خطی با الگوریتم LAPJV برای تطبیق نهایی

در مرحله نهایی روش پیشنهادی از استراتژی حل مسئله تخصیص خطی با تابع هزینه‌ای مبتنی بر اطلاعات ماتریس ویژگی‌ها استفاده می‌شود تا رابطه‌ای صریح بین تمام نقاط اشکال برقرار شود. این استراتژی امکان انتخاب یکتا و منحصر به فرد نقاط بین مدل‌ها را

فراهم کرده و به ایجاد نگاشت نقطه به نقطه و تطبیق مورد نظر منجر می‌شود. برای ارزیابی شباهت دو مدل سه‌بعدی از تفاوت ویژگی‌های آن‌ها استفاده می‌شود. در اصل برای بیان اختلاف بین دو مدل، مجموع مجذورات اختلاف مؤلفه‌های متناظر ماتریس ویژگی‌ها،  $GD$ ، محاسبه می‌شود. بر این اساس، اختلاف بین مؤلفه  $i$ ام ماتریس ویژگی یک مدل با مؤلفه  $j$ ام مدل دیگر بر مبنای فاصله اقلیدسی و مطابق با رابطه (۵) محاسبه می‌شود.

$$Dist_{ij} = \sqrt{\sum(GD_i - GD_j)^2} ; i \in \{1,2, \dots, n_S\} \text{ and } j \in \{1,2, \dots, n_T\} \quad (5)$$

در رابطه (۵)،  $n_S$  و  $n_T$  به ترتیب تعداد رئوس مدل‌های سه‌بعدی منبع و هدف را نشان می‌دهند. مؤلفه‌های ماتریس  $Dist_{ij}$  بر اساس فواصل ژئودزیکی هر نقطه تا نقاط برجسته (ویژه) محاسبه شده و تفاوت بین ویژگی‌های نقاط  $i$  و  $j$  در هر مدل را بیان می‌کنند. در ساده‌ترین حالت، کمینه مقدار این اختلاف، تطبیق بین نقاط  $i$  و  $j$  را نشان می‌دهد. با این حال، این روش تطبیق یکتا و منحصر به فرد بین نقاط مدل را تضمین نمی‌کند، زیرا ممکن است چندین نقطه در مدل هدف با یک نقطه در مدل منبع اختلاف فاصله یکسانی داشته باشند. برای ایجاد نگاشت نقطه‌ای بین مدل‌های ورودی، لازم است نگاشتی معکوس تعریف شود که نقاط را به‌طور یکتا تخصیص دهد. در روش پیشنهادی، این چالش با الهام از استراتژی حل مسئله تخصیص خطی برطرف شده است. در مسائل تخصیص خطی، هدف توزیع وظایف بین مؤلفه‌ها به گونه‌ای است که هزینه کل کمینه شود. برای محاسبه هزینه کل از ماتریس هزینه استفاده می‌شود که هزینه تخصیص هر مؤلفه از ردیف  $i$  به یک عمل در ستون  $j$  را مشخص می‌کند. مجموع هزینه‌های مؤلفه‌ها، هزینه کل را تعیین می‌کند. در این گونه مسائل، هر مؤلفه تنها یک وظیفه را انجام داده و هر وظیفه به یک مؤلفه اختصاص می‌یابد، به طوری که تمام وظایف با کمترین هزینه (مثلاً در کوتاه‌ترین زمان) انجام شوند. در روش پیشنهادی، ماتریس هزینه همان ماتریس  $Dist_{ij}$  است. بنابراین، ساختار مسئله و مدل بهینه‌سازی می‌تواند در قالب معادله (۶) بیان شود.

$$\min Cost = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m Dist_{ij} \cdot a_{ij} \quad s.t. \quad \sum_{i=1}^n a_{ij} = 1 ; \sum_{j=1}^m a_{ij} = 1 ; a_{ij} \in \{0,1\} \quad (6)$$

معادله (۶) تابع هدف را بر حسب ماتریس  $Dist_{ij}$  که از جنس فاصله است و قیدهای باینری نگاشت ( $a_{ij}$ ) تعریف می‌کند. این رویکرد تضمین می‌کند که تنها یک نقطه در شکل هدف برای نگاشت به نقطه‌ای در مدل منبع انتخاب شود. هدف این استراتژی، کمینه‌سازی هزینه از طریق انتخاب بهترین تطبیق است. تابع هدف و قیود آن، طبق معادله (۶)، نشان می‌دهند که نگاشت بهینه را می‌توان به صورت ریاضی با یک مسئله انتساب خطی بیان کرد که برای یافتن تطبیق بین نقاط به کار می‌رود. برای حل چنین مسائلی روش‌های متعددی وجود دارد، اما چالش اصلی، تعداد زیاد انتساب‌های مستقل ممکن در ماتریس هزینه است که این روش‌ها را پیچیده می‌کند. رایج‌ترین روش استفاده از الگوریتم کوهن-مانکراس<sup>۱</sup> (مجارستانی) است. الگوریتم‌های متنوعی از جمله نسخه‌های بهبود یافته مانکراس<sup>۲</sup> مبتنی بر گراف‌ها و ماتریس مجاورتی یا الگوریتم حراج<sup>۳</sup> با پیچیدگی‌های متفاوت برای حل مسئله تخصیص خطی ارائه شده‌اند. در این مقاله برای یافتن نقاط متناظر در مدل‌های سه‌بعدی منبع و هدف از الگوریتم کارآمد LAPJV استفاده شده است. این الگوریتم، یک پیاده‌سازی بهبود یافته از الگوریتم مانکراس است که با پیش‌پردازش ماتریس هزینه و بهره‌گیری از روش دایکسترا برای یافتن کوتاه‌ترین مسیرها، زمان محاسباتی را به‌طور قابل توجهی کاهش می‌دهد. الگوریتم LAPJV شامل دو فرآیند

<sup>1</sup> Kuhn-Munkres (KM)

<sup>2</sup> Improved-KM

<sup>3</sup> Auction algorithm

اصلی است: فرآیند مقدماتی<sup>۱</sup> و فرآیند بهبود با اصلاحات اضافی<sup>۲</sup>. در فرآیند مقدماتی، پیش‌پردازش ماتریس هزینه در سه مرحله انجام می‌شود: کاهش ستون<sup>۳</sup>، انتقال کاهش<sup>۴</sup> و کاهش ردیف تقویتی<sup>۵</sup>. مرحله کاهش ستون یا CRS شامل ساده‌سازی یا فشرده‌سازی اطلاعات ماتریس هزینه از طریق حذف ستون‌های غیر ضروری است که داده‌ها را برای انتساب مرتبط‌تر می‌کند و تحلیل ماتریس هزینه را تسهیل می‌نماید. مرحله انتقال کاهش یا RTS به انتقال مقادیر از یک بخش ماتریس هزینه به بخش دیگر اشاره دارد که معمولاً شامل تنظیم مقادیر برای بهینه‌سازی یا ساده‌سازی ساختار کلی و فرآیند محاسبه است. مرحله کاهش ردیف تقویتی یا ARRS با انجام عملیات سطری نظیر جمع یا تفریق مضربی از یک سطر به سطر دیگر، ماتریس تقویت شده به شکلی ساده‌تر تبدیل می‌کند تا حل مسئله تخصیص را امکان‌پذیر سازد. این فرآیند به شناسایی نقاطی کمک می‌کند که تمامی ارتباطات بین مؤلفه‌ها را به صورت همزمان برآورده می‌کنند. در نهایت، فرآیند بهبود با اصلاحات اضافی در الگوریتم LAPJV، نگاشتی دوطرفه ایجاد می‌کند (برای جزئیات بیشتر به [۶۸] مراجعه شود). الگوریتم<sup>۳</sup>، مراحل یافتن نقاط متناظر بین دو مدل سه‌بعدی را بر اساس استراتژی حل مسئله تخصیص خطی با استفاده از LAPJV خلاصه می‌کند.

### الگوریتم ۳: الگوریتم LAPJV

**ورودی‌ها:** - ماتریس هزینه ( $Cost$ ) با ابعاد تعداد رئوس مدل‌ها ( $Cost_{N \times N}$ ) حاوی مؤلفه‌های ماتریس‌های اختلاف ویژگی.

**خروجی:** - بردار ستونی انتساب‌ها ( $assignment$ ).

۱: **فرآیند مقدماتی** ( $Initialization Process$ )

۲: **حلقه for** و تکرار آن به دفعات ابعاد ورودی

۳: اجرای گام کاهش ستون ( $Column Reduction Step$ )

۴: اجرای گام کاهش انتقال ( $Reduction Transfer Step$ )

۵: اجرای گام کاهش ردیف تقویتی ( $Augmenting Row Reduction Step$ )

۶: **فرآیند بهبود با اصلاحات اضافی** ( $Augmentation Process$ )

۷: **پایان حلقه for**

۸: تعیین مقادیر مطلوب هزینه‌ها ( $Optimal Costs$ )

۹: ذخیره انتساب‌های مطلوب (بهینه) در بردار  $assignment$  و ارائه مقدار هزینه کمینه مربوط به انتساب‌های بهینه

### ۴- جزئیات پیاده‌سازی

روش پیشنهادی و الگوریتم‌های آن با استفاده از نرم افزار MATLAB پیاده سازی شده‌اند. تمامی آزمایش‌ها روی یک کامپیوتری ثابت با مشخصات سیستم عامل ۶۴ بیتی، پردازنده Core-i7 با سرعت ۲/۴ گیگاهرتز و ۸ گیگابایت حافظه انجام گرفته است. در فرآیند اجرای الگوریتم پیشنهادی از دو مجموعه داده استاندارد برای تناظریابی اشکال سه‌بعدی استفاده شده است. در ادامه، جزئیات و مشخصات هر یک از مجموعه داده‌ها و تنظیمات مورد نیاز برای اجرای صحیح الگوریتم‌ها ارائه شده است.

<sup>1</sup> Initialization process

<sup>2</sup> Augmentation process

<sup>3</sup> Column Reduction Step

<sup>4</sup> Reduction Transfer Step

<sup>5</sup> Augmentation Row Reduction Step

#### ۱-۴ - مجموعه داده‌ها

در این مقاله از مجموعه داده‌های پنج مارک DT4D<sup>۱</sup> و SMAL<sup>۲</sup> [۷۰] استفاده شده است. مجموعه داده DT4D شامل ۱۹۷۲ انیمیشن از اشکال مصنوعی انسان نما است که ۳۱ حیوان مختلف یا اشکال انسان‌نما با تراکم 4D را در بر می‌گیرد. ویژگی اصلی مجموعه داده DT4D، تغییرات حرکتی و غیرصُلب مدل‌های آن است. مجموعه داده SMAL شامل گونه‌های مختلف حیوانات چهارپا است که حاوی ۴۱ مدل از هشت گونه حیوانی در حالت‌ها و ژست‌های متنوع است. مجموعه داده SMAL شامل ۳۰۰ ژست منحصربه‌فرد از حیواناتی نظیر شیر، ببر، اسب، گاو، اسب آبی و سگ است. ویژگی عمده مجموعه داده SMAL، تغییرات شکل غیرایزومتریک بین گونه‌ها است که چالشی بزرگ برای روش‌های تناظریابی ایجاد می‌کند. از منظر آناتومیکی، امکان برقراری تناظر بین این اشکال وجود دارد، زیرا ساختارهای مشابهی بین مدل‌ها قابل تشخیص است. بنابراین، می‌توان تناظرهای معتبر به‌صورت خودکار برقرار کرد. در این مقاله از ۹ کلاس اشکال انسان‌نما از مجموعه داده DT4D و ۲۰ مدل از حیوانات چهارپا از مجموعه SMAL استفاده شده است.

#### ۲-۴ - تنظیم پارامترها

در آزمایش‌های انجام شده برای روش پیشنهادی، تمامی پارامترها به‌صورت یکسان تنظیم شده‌اند. به‌طور خاص، از تنظیمات پیش‌فرض ارائه شده توسط نویسندگان روش‌های رقابتی برای متغیرهای مختلف استفاده شده است. اشکال ورودی با استفاده از الگوریتم LRVD [۷۱] دوباره مش‌بندی شده‌اند تا بایاس ناشی از مش‌های با اتصالات مشابه در مجموعه داده‌ها حذف شود. این مش‌بندی به‌صورت مستقل انجام شده است تا اشکال دارای اتصال یکسانی نباشند. به این ترتیب از اشکال با ۵۰۰۰ رأس استفاده شده است. در پیاده‌سازی روش‌های ارائه شده در [۵۰] و [۶۰] برای محاسبه نگاشت تابعی از ۱۲۰ تابع پایه ( $k=120$ ) بهره گرفته شده است. این تعداد پایه برای مدل‌های غیرایزومتریک در مجموعه داده‌ها کافی بوده و اطلاعات لازم برای توصیف‌گرهای محاسباتی آن‌ها را فراهم می‌کند. برای تقریب دقیق تابع میانگین فاصله ژئودزیکی (AGD) و کاهش بار محاسباتی از ۱۶ نقطه نمونه ( $p_s=16$ ) در شناسایی نقاط برجسته (ویژه) از اشکال ورودی استفاده شده است.

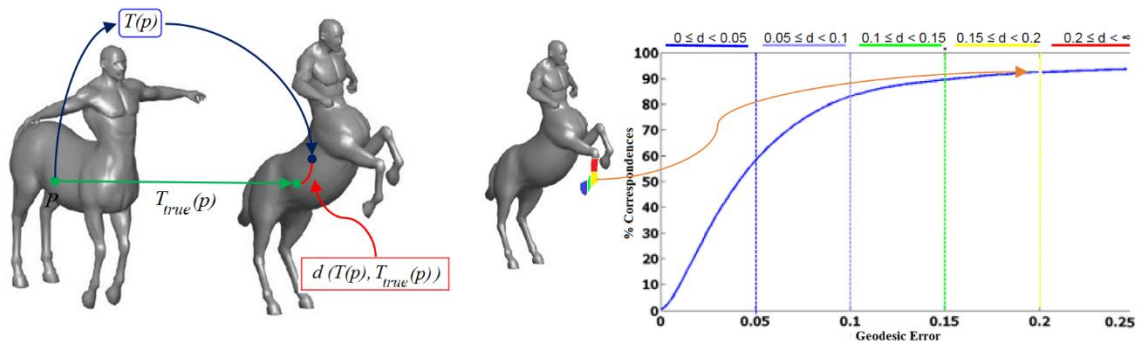
در ادامه، روش پیشنهادی با رویکردهای ارائه شده در [۴۸]، [۵۰] و [۶۰] مقایسه شده است که همگی از استراتژی مبتنی بر تطبیق ویژگی و توصیف‌گرها برای محاسبه تطبیق بین اشکال سه‌بعدی استفاده می‌کنند. به‌طور خلاصه، رویکرد [۴۸] از توصیف‌گرهای فاصله ژئودزیکی و پایه‌های تعریف شده برای تناظریابی در فضای متریک با حفظ اطلاعات شکلی بهره می‌برد. روش [۵۰]، محدودیت‌های حفظ توصیف‌گر و ویژگی‌های آن را در چارچوب نگاشت‌های تابعی ترکیب می‌کند تا تطبیق بهتری حاصل شود. روش [۶۰]، تناظرهای بین اشکال ورودی را با استفاده از توصیف‌گرهای تابعی و پایه‌های تعریف شده روی مدل‌های منبع و هدف محاسبه می‌کند. آزمایش‌های انجام شده و مقایسه نتایج، شامل رویکردهای مبتنی بر یادگیری ماشین نمی‌شوند، زیرا اغلب هزینه‌های آموزشی بالایی دارند و ممکن است به داده‌های دلخواه قابل تعمیم نباشند. در عوض، از تکنیک‌هایی استفاده شده است که نیازی به آموزش ندارند و به‌طور کلی برای مجموعه داده‌های مختلف قابل اجرا هستند. این رویکرد، امکان ارزیابی منصفانه کارایی روش پیشنهادی در مقایسه با عملکرد سایر روش‌های تطبیق شکل را فراهم می‌کند.

<sup>1</sup> Deforming Things4D

<sup>2</sup> Skinned Multi-Animal Linear model

### ۳-۴- معیارهای ارزیابی

برای ارزیابی نتایج تناظریابی روش پیشنهادی از پروتکل معرفی شده در [۷۲] استفاده شده است. این پروتکل کیفیت تطبیق را با استفاده از معیار خطای استاندارد (منحنی خطای ژئودزیکی) ارزیابی می‌کند. این منحنی، توزیع خطاهای تطبیق را نشان می‌دهد؛ به طوری که محور افقی ( $x$ ) مقدار آستانه فاصله ژئودزیکی (خطای ژئودزیکی) و محور عمودی ( $y$ )، نرخ تطبیق یا میانگین درصد نقاطی را نشان می‌دهد که در فاصله مشخصی نسبت به مکان واقعی شان،  $gt$ ، پیش‌بینی شده‌اند. به عبارت دیگر برای هر نقطه از مدل منبع، فاصله ژئودزیکی بین نقطه پیش‌بینی شده و  $gt$  آن روی مدل هدف محاسبه می‌شود. این فاصله‌ها با ریشه دوم مساحت مدل هدف نرمال‌سازی می‌شوند. در شکل ۵ نمایش شهودی از پروتکل ارزیابی بین دو مدل فرضی ارائه شده است. نقاط سبز رنگ، نقاط متناظر در مدل منبع و هدف (به ترتیب در اشکال سه‌بعدی سمت چپ و راست) هستند؛ نقطه آبی نشان دهنده نقطه پیش‌بینی شده روی مدل هدف است و مسیر قرمز رنگ، فاصله ژئودزیکی بین نقاط آبی و سبز را روی مدل هدف نشان می‌دهد. هر چه این فاصله کمتر باشد، خطای پیش‌بینی کاهش می‌یابد. بر اساس منحنی ارائه شده در شکل ۶، میانگین نقاطی که در فاصله‌ای کمتر از  $0.2$  نسبت به  $gt$  آن‌ها روی مدل هدف پیش‌بینی شده‌اند، برابر با  $90\%$  درصد است. در این مثال، مقدار آستانه  $0.2$  در نظر گرفته شده است. همچنین برای ارزیابی بصری و مقایسه کیفی نتایج تطبیق از رنگ‌ها استفاده شده است. نقاط متناظر در اشکال منبع و هدف با رنگ‌های مشابه نشان داده می‌شوند.



شکل ۵. نمایش شهودی پروتکل ارزیابی و نمودار (منحنی) نرخ تطبیق.

### ۵- آزمایش‌ها و واکاوی نتایج

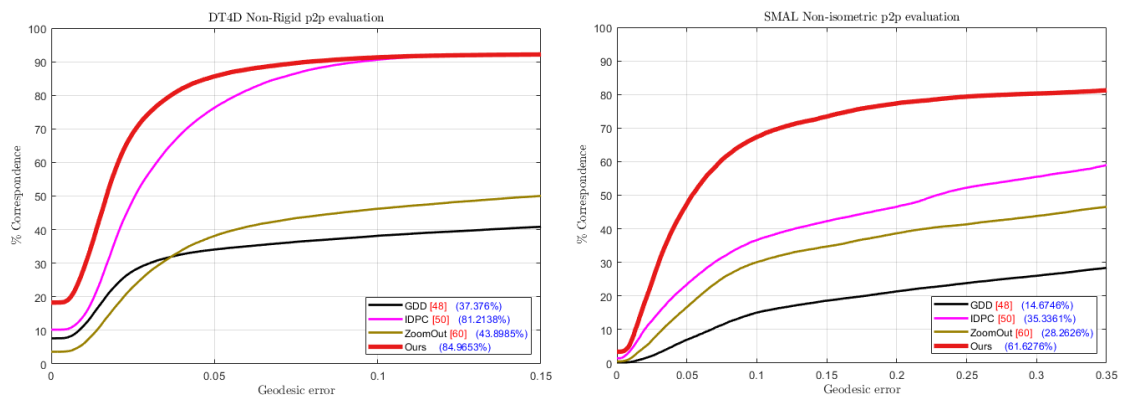
در این بخش، نتایج حاصل از روش پیشنهادی در تناظریابی اشکال سه‌بعدی بررسی شده و نقاط قوت و ضعف آن تحلیل می‌شود. نتایج کمی و کیفی روش پیشنهادی با رویکردهای [۴۸]، [۵۰] و [۶۰] روی مجموعه داده‌های DT4D و SMAL مقایسه شده است. شکل ۶ منحنی‌های مقایسه‌ای را بر اساس پروتکل ارزیابی [۷۲] برای روش‌های مختلف روی این مجموعه داده‌ها نمایش می‌دهد. در این منحنی‌ها، درصد تناظرهای پیش‌بینی شده در فاصله ژئودزیکی مشخص نسبت به حقیقت پایه ( $gt$ ) ترسیم شده است. در شکل ۶ (سمت چپ)، منحنی‌های روش پیشنهادی با رویکردهای [۴۸]، [۵۰] و [۶۰] روی مجموعه داده غیرصلب DT4D مقایسه شده‌اند. نمودارها نشان می‌دهند که روش پیشنهادی عملکرد بهتری نسبت به سایر روش‌ها دارد. برای مثال، درصد تناظرهای پیش‌بینی شده با روش پیشنهادی در آستانه فاصله ژئودزیکی  $0.05$ ، بالاتر از سایر منحنی‌ها و به طور تقریبی برابر با  $85\%$  است. همچنین، بیشترین سطح زیر منحنی معادل  $84.9653\%$  با روش پیشنهادی به دست آمده است. به طور میانگین، تعداد نقاط پیش‌بینی شده صحیح با روش

<sup>1</sup> Ground truth

پیشنهادی روی مدل‌های مجموعه داده DT4D از سایر روش‌ها بیشتر است. به‌طور مشابه در شکل ۶ (سمت راست)، منحنی‌های مقایسه‌ای روی مجموعه داده‌های غیرایزومتریک SMAL ترسیم شده‌اند. نتایج نشان می‌دهند که بیشترین سطح زیر منحنی برابر با ۶۱/۶۲۷۶٪ متعلق به روش پیشنهادی است. به عبارت دیگر، میانگین تعداد نقاط پیش‌بینی شده صحیح با روش پیشنهادی روی مدل‌های مجموعه داده SMAL نسبت به سایر روش‌ها بیشتر است. در مجموع، نتایج آزمایش‌ها نشان می‌دهند که روش پیشنهادی در مقایسه با رویکردهای [۴۸]، [۵۰] و [۶۰] در هر دو مجموعه داده عملکرد بهتری داشته و نرخ تطبیق بالاتری را کسب کرده است. در ادامه، نتایج کمی برای مدل‌های سه‌بعدی مختلف از مجموعه داده‌ها در جدول ۱ ارائه شده است. معیارهای ارزیابی شامل میانگین خطای ژئودزیک و میانگین زمان اجرا (برحسب ثانیه) برای روش‌های مختلف است که به ترتیب با نمادهای Av. Geo. Err. و Av. Time نشان داده شده‌اند. نتایج نشان می‌دهند که روش پیشنهادی در مقایسه با رویکردهای [۴۸]، [۵۰] و [۶۰] به مقادیر خطای کمتری دست یافته است. به‌طور خاص، میانگین خطای ژئودزیک روش پیشنهادی برای مجموعه داده‌های DT4D و SMAL به ترتیب (۰/۰۷۱) و (۰/۱۷۱۸) محاسبه شده است که کمترین مقدار خطا در مقایسه با سایر روش‌ها است. همچنین از نظر زمان اجرا، روش پیشنهادی با روش [۵۰] قابل مقایسه بوده و نسبت به سایر روش‌ها سریع‌تر عمل می‌کند. بر اساس نتایج، روش پیشنهادی در مجموعه داده SMAL که شامل مدل‌های غیرایزومتریک است، از نظر کمی و کیفی عملکرد بهتری نسبت به سایر روش‌ها دارد. شکل ۷ ارزیابی بصری و مقایسه کیفی نتایج تناظریابی روش‌های مختلف بین جفت مدل‌های ورودی را نمایش می‌دهد. برتری کیفی نتایج روش پیشنهادی نسبت به رویکردهای [۴۸]، [۵۰] و [۶۰] با استفاده از نمایش رنگی برای هر مجموعه داده نشان داده شده است.

جدول ۱: نتایج ارزیابی کمی در مجموعه داده‌های مختلف و مقایسه روش پیشنهادی با رویکردهای [۴۸]، [۵۰] و [۶۰].

روش	مجموعه داده	Av. Geo. Err.	Av. Time in sec
GDD [۴۸]	DT4D	۰/۳۶۵۸	۴۹/۰۰
	SMAL	۰/۵۷۲۵	۵۶/۵۰
IDPC [۵۰]	DT4D	۰/۰۸۲۰	۱۷/۱۳
	SMAL	۰/۴۵۰۶	۱۶/۵۱
Zoom Out [۶۰]	DT4D	۰/۳۳۵۴	۲۷/۹۱
	SMAL	۰/۴۸۷۳	۲۷/۱۰
روش پیشنهادی	DT4D	۰/۰۷۱۰	۲۱/۳۱
	SMAL	۰/۱۷۱۸	۲۲/۱۹

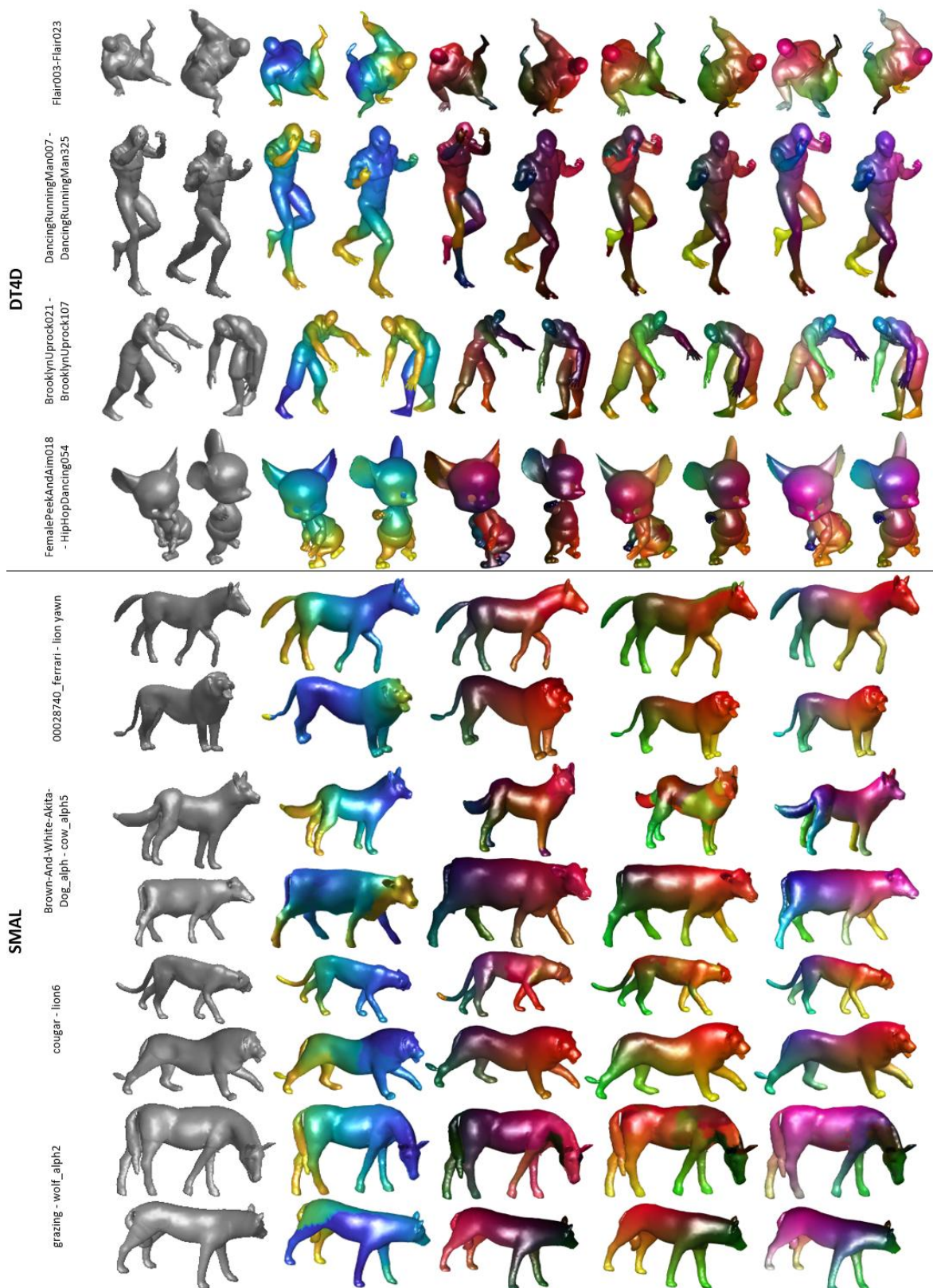


شکل ۶: نتایج کمی و مقایسه روش پیشنهادی با رویکردهای [۴۸]، [۵۰] و [۶۰] بر اساس پروتکل ارزیابی [۷۲].

## ۱-۵- پیچیدگی محاسباتی

در این بخش، پیچیدگی محاسباتی روش پیشنهادی برای یافتن تناظر بین دو مدل سه‌بعدی تحلیل شده است. الگوریتم پیشنهادی در سه مرحله اصلی اجرا می‌شود و پیچیدگی محاسباتی هر مرحله به صورت جداگانه تخمین زده شده است. در مرحله اول برای محاسبه فواصل ژئودزیکی روی مدل‌ها از الگوریتم Fast Marching با پیچیدگی محاسباتی  $O(n \log n)$  استفاده شده است که  $n$  تعداد نقاط (رئوس) مدل‌ها است. محاسبات فاصله‌های ژئودزیکی،  $p_s$  بار برای شناسایی اولین نقطه برجسته (ویژه) و  $(n_{sp} - 1)$  بار برای سایر نقاط برجسته انجام می‌شود. بنابراین، پیچیدگی محاسباتی مرحله اول برای شناسایی نقاط برجسته مدل برابر است با:  $O(p_s \cdot n \log n + (n_{sp} - 1) n \log n)$ . فشرده‌ترین بخش مرحله دوم از نظر محاسباتی به خط شماره چهارم الگوریتم ۲ مربوط می‌شود که به روش محاسبه فواصل ژئودزیکی روی سطح مش وابسته است. در این مرحله، استخراج ماتریس ویژگی مدل‌ها بر اساس فواصل ژئودزیکی نقاط از نقاط ویژه با استفاده از الگوریتم Fast Marching انجام می‌شود که پیچیدگی محاسباتی آن  $O(n \log n)$  است. مرحله سوم که به برقراری تطبیق بین نقاط مدل‌ها با الگوریتم ۳ (LAPJV) اختصاص دارد، به دلیل عملیات سطری و ستونی روی ماتریس ورودی با ابعاد  $n \times n$ ، دارای پیچیدگی محاسباتی  $O(n^2)$  است. برای مطالعه دقیق‌تر تحلیل پیچیدگی الگوریتم ۳، خواننده می‌تواند به بخش ضمیمه (الف) مراجعه کند. به طور خلاصه، پیچیدگی محاسباتی مراحل مختلف روش پیشنهادی در جدول ۲ ارائه شده است. در حالت کلی، پیچیدگی کل روش پیشنهادی از مجموع پیچیدگی مراحل آن محاسبه می‌شود که در بدترین حالت برابر با  $O(n^2)$  است.

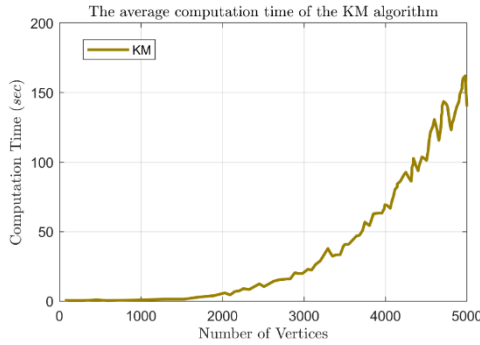
در این مقاله، برای تسریع الگوریتم LAPJV از یک فایل mex نوشته شده در زبان برنامه‌نویسی C++ استفاده شده است. به منظور نشان دادن کارایی الگوریتم LAPJV در کاهش قابل توجه زمان اجرا از الگوریتم‌های مشابه مانند الگوریتم حراج [۷۳]، کوهن-مانکراس (KM) و نسخه بهبود یافته آن [۷۴] به جای LAPJV استفاده شد. برای مقایسه زمان محاسباتی الگوریتم‌ها، نتایج روش پیشنهادی روی ۱۰۰ جفت مدل با تعداد رئوس بین ۱۰ تا ۵۰۰۰ بررسی شده است. در شکل ۸، نمودارهای مقایسه‌ای زمان‌های محاسباتی الگوریتم‌ها با تغییر تعداد رئوس مدل ارائه شده است که به ترتیب میانگین زمان‌های محاسباتی برای الگوریتم LAPJV، KM، بهبود یافته KM و الگوریتم حراج را نشان می‌دهد. به عنوان مثال، شکل‌های ۸-الف تا ۸-ج نشان می‌دهند که برای مدل‌هایی با ۳۷۰۰ نقطه، میانگین زمان محاسباتی الگوریتم LAPJV کمتر از ۲۰ ثانیه است. در حالی که، میانگین زمان الگوریتم حراج با ۸۰۰ نقطه، الگوریتم KM با ۲۷۰۰ نقطه و بهبود یافته KM با ۲۹۰۰ نقطه از ۲۰ ثانیه فراتر می‌رود. همچنین در شکل ۸-د مشاهده می‌شود که الگوریتم LAPJV با تغییر تعداد نقاط مدل از ۱۰ تا ۵۰۰۰، همواره زمان محاسباتی بسیار کمتری نسبت به سه الگوریتم دیگر دارد. اگرچه میانگین با تغییر تعداد نقاط مدل (رأس‌های شکل سه‌بعدی)، میانگین زمان محاسباتی الگوریتم LAPJV افزایش می‌یابد، اما همچنان در حدود ۲۰ ثانیه باقی می‌ماند.



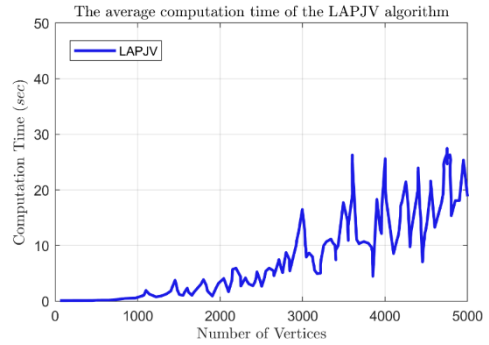
شکل ۷. نمایش کیفی نتایج روش پیشنهادی با رویکردهای [۴۸]، [۵۰] و [۶۰] روی اشکال مجموعه داده‌های SMAL و DT4D

جدول ۲: پیچیدگی محاسباتی روش پیشنهادی ( $n$  = تعداد رئوس،  $n_{sp}$  = تعداد نقاط برجسته)

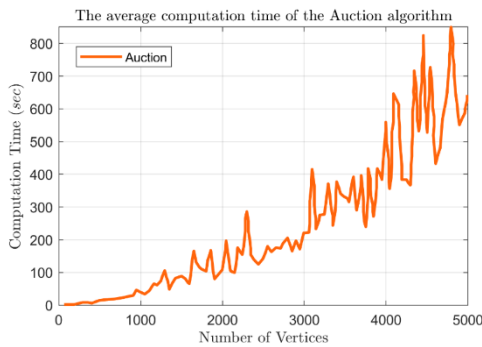
مراحل	هدف الگوریتم در هر مرحله	پیچیدگی محاسباتی
۱	شناسایی نقاط برجسته (ویژه)	$O(p_s n \log n + (n_{sp} - 1) n \log n)$
۲	استخراج ماتریس ویژگی	$O(n \log n)$
۳	برقراری تطابق بین نقاط با الگوریتم LAPJV	$O(n^2)$



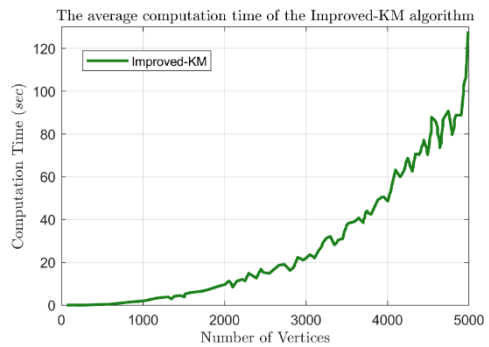
(ب)



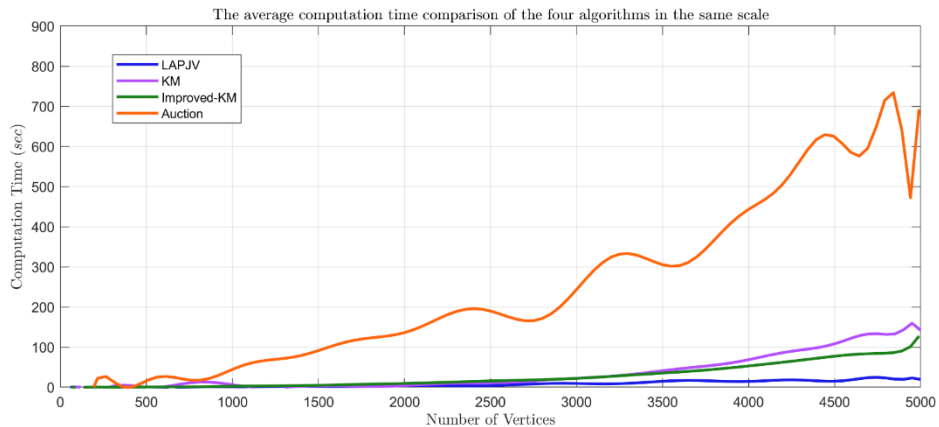
(الف)



(ج)



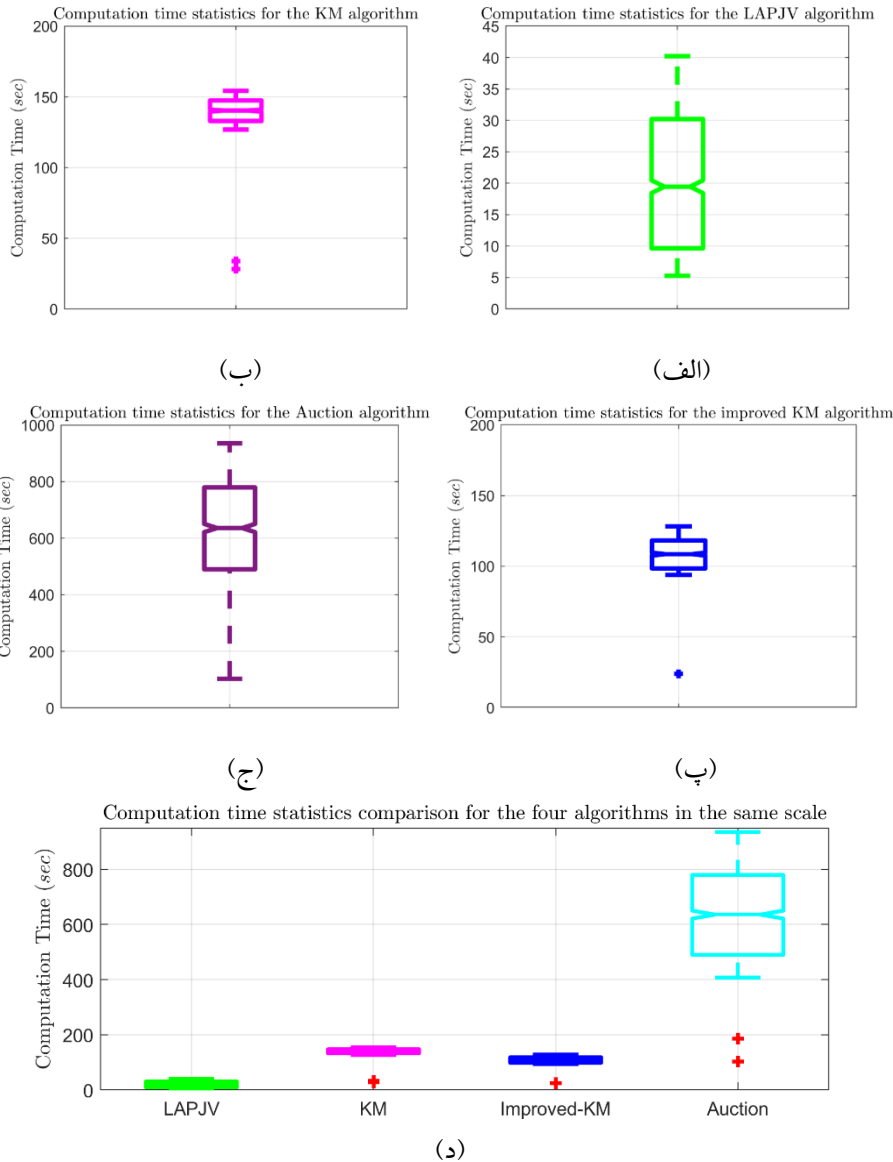
(پ)



(د)

شکل ۸. نمودارهای مقایسه‌ای زمان محاسباتی بین الگوریتم‌های KM، LAPJV، KM، بهبود یافته KM و الگوریتم حراج با تغییر نقاط مدل از ۱۰ تا ۵۰۰۰. (الف) میانگین زمان محاسباتی الگوریتم LAPJV. (ب) میانگین زمان محاسباتی الگوریتم KM. (پ) میانگین زمان محاسباتی الگوریتم بهبود یافته KM. (ج) میانگین زمان محاسباتی الگوریتم حراج. (د) مقایسه میانگین زمان محاسباتی چهار الگوریتم در یک مقیاس.

برای تحلیل دقیق‌تر، آمار زمان محاسبه برای حالت ۵۰۰۰ نقطه از ۱۰۰ جفت مدل (شامل تمام رئوس مدل‌ها) پیاده‌سازی شده و نتایج آزمایش در شکل ۹ ارائه شده است. میانگین زمان محاسباتی الگوریتم LAPJV برابر با ۲۰ ثانیه است. در حالی که این مقدار برای الگوریتم KM برابر با ۱۴۰ ثانیه، برای الگوریتم بهبود یافته KM برابر با ۱۰۸ ثانیه و الگوریتم حراج بیش از ۶۰۰ ثانیه است. به عبارت دیگر، الگوریتم LAPJV زمان محاسباتی را به ترتیب ۸۵/۷۱٪ نسبت به الگوریتم KM، ۸۱/۴۸٪ نسبت به الگوریتم بهبود یافته KM و بیش از ۹۶٪ نسبت به الگوریتم حراج کاهش می‌دهد.



شکل ۹. مقایسه آماری زمان محاسباتی بین الگوریتم LAPJV، KM، بهبود یافته KM و الگوریتم حراج برای مدل با ۵۰۰۰ رأس. (الف) آمار زمان محاسباتی الگوریتم LAPJV. (ب) آمار زمان محاسباتی الگوریتم KM. (پ) آمار زمان محاسباتی الگوریتم بهبود یافته KM. (ج) آمار زمان محاسباتی الگوریتم حراج. (د) مقایسه آماری زمان محاسباتی چهار الگوریتم در یک مقیاس.

در جدول ۳، نتایج آزمایش‌ها به صورت خلاصه ارائه شده است. نتایج نشان می‌دهند که زمان محاسباتی الگوریتم LAPJV در مقایسه با الگوریتم های KM، حراج و بهبود یافته KM به طور قابل توجهی کمتر بوده و عملکرد سریع تری دارد.

جدول ۳: پیچیدگی محاسباتی و زمان اجرای مرحله ۳ از روش پیشنهادی ( $n$  = تعداد رئوس)

نام الگوریتم برای حل مسایل انتساب خطی	پیچیدگی محاسباتی	متوسط زمان اجرا با $n = 5k$ (بر حسب ثانیه)
الگوریتم حراج (Auction) [۷۳]	$O(n^2 \log n)$	$>> 140$
الگوریتم کلاسیک کوهن-مانکراس [۷۴]	$O(n^4)$	۱۴۰
الگوریتم بهبود یافته کوهن-مانکراس [۷۴]	$O(n^3)$	۱۰۸
الگوریتم LAPJV	$O(n^2)$	۲۰

## ۲-۵ - مقایسه مدت زمان اجرا

زمان محاسباتی هر الگوریتم به طور مستقیم با پیچیدگی محاسباتی آن مرتبط است. بنابراین، زمان محاسباتی روش پیشنهادی با روش‌های رقابتی [۴۸]، [۵۰] و [۶۰] مقایسه شده است. با توجه به سخت افزار معرفی شده در این تحقیق و شبیه‌سازی‌های انجام شده، زمان محاسباتی روش‌ها اندازه‌گیری شده است. در جدول ۱، زمان اجرای روش‌های تطبیق ارائه شده است. نتایج نشان می‌دهند که روش پیشنهادی از نظر زمان محاسباتی با اختلاف ۵ ثانیه نسبت به روش [۵۰] در رتبه دوم قرار دارد. به طور میانگین، زمان مورد نیاز برای یافتن تطبیق بین دو مدل سه‌بعدی از مجموعه داده‌های مختلف با روش [۴۸] برابر با ۵۳ ثانیه، با روش [۶۰] برابر با ۲۷ ثانیه و با روش پیشنهادی برابر با ۲۲ ثانیه است. همچنین، مقایسه زمان محاسباتی روش پیشنهادی با رویکردهای [۴۸]، [۵۰] و [۶۰] براساس مفهوم  $Big-O$  نشان می‌دهد که در بدترین حالت، پیچیدگی محاسباتی روش پیشنهادی برابر با  $O(n^2)$  است که کمتر از پیچیدگی محاسباتی  $O(n^3)$  برای روش‌های [۴۸]، [۵۰] و [۶۰] است که  $n$  تعداد رئوس مدل‌ها است.

## ۳-۵ - محدودیت‌ها و کارهای آینده

در این تحقیق فرض شده است که اشکال ورودی به طور نسبی منظم بوده و دارای خصایص مشابهی هستند. به طور خاص، انتظار می‌رود که دست کم ساختارهای مشابه در مقیاس بزرگ بین اشکالی که باید تطبیق داده شوند، قابل مشاهده باشد. علاوه بر این، روش پیشنهادی از مدل‌های سه‌بعدی کامل استفاده می‌کند و اشکال جزئی یا مدل‌های تخریب شده در نظر گرفته نمی‌شوند. روش پیشنهادی با استفاده از حل مسئله انتساب خطی LAPJV به نتایج مطلوبی روی مجموعه داده‌ها دست یافته است. همان‌طور که منحنی‌های خطای ژئودزیک در شکل ۶ برای مجموعه داده SMAL نشان می‌دهند روش پیشنهادی می‌تواند با انتخاب ویژگی‌های هندسی جدید و ترکیب آن‌ها با ویژگی فعلی از طریق تکنیک‌های سریع در جستجوی نقاط متناظر یا افزودن مرحله پس پردازش بهبود یابد. مورد اول از پیش‌بینی نقاط پرت به عنوان نقاط متناظر جلوگیری کرده یا ابهامات ناشی از تقارن را رفع می‌کند. مورد دوم به افزایش سرعت اجرای الگوریتم LAPJV کمک می‌کند. مورد سوم برای بهبود نگاشت پیش‌بینی شده به کار می‌رود.

## ۶- نتیجه‌گیری

در این مقاله، روشی کارآمد مبتنی بر استراتژی انتساب‌های خطی با استفاده از الگوریتم LAPJV برای یافتن تطبیق منحصر به فرد بین نقاط یک جفت شکل سه‌بعدی پیشنهاد شده است. تابع هزینه مسئله تخصیص خطی بر اساس شناسایی نقاط برجسته اشکال ورودی و استخراج ماتریس ویژگی‌ها با استفاده از توصیفگر فاصله ژئودزیکی تعریف شده است. مزایای روش پیشنهادی در مقایسه با روش‌های دیگر روی مجموعه داده‌های بنچ مارک شناخته شده، ارزیابی شده است. نتایج نشان می‌دهند که روش پیشنهادی برای اشکال غیر صُلب مجموعه داده DT4D و اشکال غیر ایزومتریک مجموعه داده SMAL در مقایسه با رویکردهای [۴۸]، [۵۰] و [۶۰] نرخ تطبیق بالاتری دارد. همان‌طور که در نمودارهای شکل ۶ نشان داده شده است، میانگین نرخ تطبیق برای آستانه خطای ژئودزیکی کمتر از ۰/۰۵ و ۰/۱۵ به ترتیب ۰/۸۵ و ۰/۷۳ است که متعلق به روش پیشنهادی است. همچنین بر اساس مقادیر جدول ۱، کمترین میانگین خطای ژئودزیکی برای مجموعه داده‌های SMAL و DT4D به روش پیشنهادی تعلق دارد. علاوه بر این، مقایسه‌های انجام شده از نظر زمان اجرا و پیچیدگی محاسباتی، برتری روش پیشنهادی را نسبت به رویکردهای مقایسه شده نشان می‌دهد. به‌طور کلی، روش پیشنهادی در مقایسه با رویکردهای [۴۸]، [۵۰] و [۶۰] به بهبود نرخ تطبیق، کاهش پیچیدگی محاسباتی و افزایش سرعت اجرا دست یافته است. در آینده، قصد داریم چارچوب روش پیشنهادی را با در نظر گرفتن ملاحظات بیشتر به طیف گسترده‌تری از اشکال ورودی گسترش دهیم تا امکان استفاده از آن برای برقراری تطبیق دقیق‌تر بین مدل‌های سه‌بعدی در سایر مجموعه داده‌ها با ویژگی‌های متنوع، اشکال جزئی یا تخریب شده یا مدل‌هایی با تغییرات شکلی زیاد فراهم شود و نقاط ضعف روش پیشنهادی در این موارد برطرف شود.

## مراجع

- [1] O. van Kaick, H. Zhang, G. Hamarneh, and D. Cohen-Or, "A Survey on Shape Correspondence," *Computer Graphics Forum*, vol. 30, no. 6, pp. 1681-1707, 2011, doi: <https://doi.org/10.1111/j.1467-8659.2011.01884.x>.
- [2] R. M. Dyke *et al.*, "SHREC'20: Shape correspondence with non-isometric deformations," *Computers & Graphics*, vol. 92, pp. 28-43, 2020/11/01/ 2020, doi: <https://doi.org/10.1016/j.cag.2020.08.008>.
- [3] A. Sedaghat and H. Ebadi, "Remote Sensing Image Matching Based on Adaptive Binning SIFT Descriptor," *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, vol. 53, no. 10, pp. 5283-5293, 2015, doi: 10.1109/TGRS.2015.2420659.
- [4] D. Forsyth and J. Ponce, *Computer Vision: A Modern Approach*. Pearson, 2012.
- [5] M. Mirloo and H. Ebrahimnezhad, "Non-rigid 3D object retrieval using directional graph representation of wave kernel signature," *Multimedia Tools and Applications*, vol. 77, no. 6, pp. 6987-7011, 2018/03/01 2018, doi: 10.1007/s11042-017-4617-x.
- [6] R. M. Dyke, Y.-K. Lai, P. L. Rosin, and G. K. L. Tam, "Non-Rigid Registration under Anisotropic Deformations," *Comput. Aided Geom. Des.*, vol. 71, no. C, pp. 142-156, 2019, doi: 10.1016/j.cagd.2019.04.014.
- [7] T. Jiang *et al.*, "Huber- $\mathbb{S}^L_1$ -based non-isometric surface registration," *The Visual Computer*, vol. 35, no. 6, pp. 935-948, 2019/06/01 2019, doi: 10.1007/s00371-019-01670-1.
- [8] D. Ezuz, B. Heeren, O. Azencot, M. Rumpf, and M. Ben-Chen, "Elastic Correspondence between Triangle Meshes," *Computer Graphics Forum*, vol. 38, no. 2, pp. 121-134, 2019, doi: <https://doi.org/10.1111/cgf.13624>.
- [9] G. K. Tam *et al.*, "Registration of 3D point clouds and meshes: A survey from rigid to nonrigid," *IEEE transactions on visualization and computer graphics*, vol. 19, no. 7, pp. 1199-1217, 2012.
- [10] Y. Sahillioğlu, "Recent advances in shape correspondence," *The Visual Computer*, vol. 36, no. 8, pp. 1705-1721, 2020.
- [11] J. Pokrass, A. M. Bronstein, M. M. Bronstein, P. Sprechmann, and G. Sapiro, "Sparse Modeling of

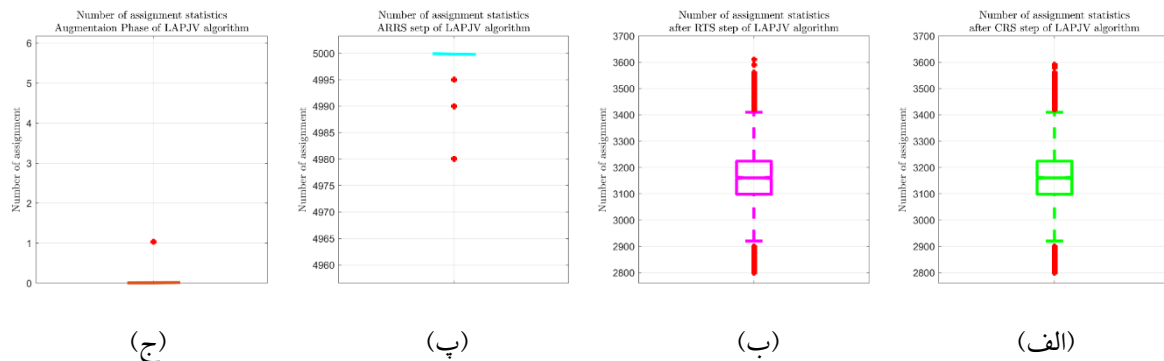
- Intrinsic Correspondences," *Computer Graphics Forum*, vol. 32, no. 2pt4, pp. 459-468, 2013, doi: <https://doi.org/10.1111/cgf.12066>.
- [12] O. van Kaick, H. Zhang, and G. Hamarneh, "Bilateral Maps for Partial Matching," *Computer Graphics Forum*, vol. 32, no. 6, pp. 189-200, 2013, doi: <https://doi.org/10.1111/cgf.12084>.
- [13] M. Ovsjanikov, M. Ben-Chen, J. Solomon, A. Butscher, and L. Guibas, "Functional Maps: A Flexible Representation of Maps between Shapes," *ACM Trans. Graph.*, vol. 31, no. 4, 2012, doi: 10.1145/2185520.2185526.
- [14] Y. Kleiman and M. Ovsjanikov, "Robust Structure-Based Shape Correspondence," *Computer Graphics Forum*, vol. 38, no. 1, pp. 7-20, 2019, doi: <https://doi.org/10.1111/cgf.13389>.
- [15] D. Nogneng and M. Ovsjanikov, "Informative Descriptor Preservation via Commutativity for Shape Matching," *Comput. Graph. Forum*, vol. 36, no. 2, pp. 259-267, 2017, doi: 10.1111/cgf.13124.
- [16] R. Marin, S. Melzi, E. Rodola, and U. Castellani, "Farm: Functional automatic registration method for 3d human bodies," in *Computer Graphics Forum*, 2020, vol. 39, no. 1: Wiley Online Library, pp. 160-173.
- [17] A. Gehre, M. Bronstein, L. Kobbelt, and J. Solomon, "Interactive curve constrained functional maps," in *Computer Graphics Forum*, 2018, vol. 37, no. 5: Wiley Online Library, pp. 1-12.
- [18] J. Sun, M. Ovsjanikov, and L. Guibas, "A concise and provably informative multi-scale signature based on heat diffusion," in *Computer graphics forum*, 2009, vol. 28, no. 5: Wiley Online Library, pp. 1383-1392.
- [19] M. Aubry, U. Schlickewei, and D. Cremers, "The wave kernel signature: A quantum mechanical approach to shape analysis," in *2011 IEEE international conference on computer vision workshops (ICCV workshops)*, 2011: IEEE, pp. 1626-1633.
- [20] H. Chui and A. Rangarajan, "A new algorithm for non-rigid point matching," in *Proceedings IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. CVPR 2000 (Cat. No. PR00662)*, 2000, vol. 2: IEEE, pp. 44-51.
- [21] F. L. Bookstein, "Principal warps: Thin-plate splines and the decomposition of deformations," *IEEE Transactions on pattern analysis and machine intelligence*, vol. 11, no. 6, pp. 567-585, 1989.
- [22] R. W. Sumner and J. Popović, "Deformation transfer for triangle meshes," *ACM Transactions on graphics (TOG)*, vol. 23, no. 3, pp. 399-405, 2004.
- [23] N. Aigerman, R. Poranne, and Y. Lipman, "Lifted bijections for low distortion surface mappings," *ACM Transactions on Graphics (TOG)*, vol. 33, no. 4, pp. 1-12, 2014.
- [24] O. Weber and D. Zorin, "Locally injective parametrization with arbitrary fixed boundaries," *ACM Transactions on Graphics (TOG)*, vol. 33, no. 4, pp. 1-12, 2014.
- [25] N. Aigerman and Y. Lipman, "Orbifold tutte embeddings," *ACM Trans. Graph.*, vol. 34, no. 6, pp. 190:1-190:12, 2015.
- [26] N. Aigerman and Y. Lipman, "Hyperbolic orbifold tutte embeddings," *ACM Trans. Graph.*, vol. 35, no. 6, pp. 217:1-217:14, 2016.
- [27] N. Aigerman, R. Poranne, and Y. Lipman, "Seamless surface mappings," *ACM Transactions on Graphics (TOG)*, vol. 34, no. 4, pp. 1-13, 2015.
- [28] D. Panozzo, I. Baran, O. Diamanti, and O. Sorkine-Hornung, "Weighted averages on surfaces," *ACM Transactions on Graphics (TOG)*, vol. 32, no. 4, pp. 1-12, 2013.
- [29] D. Ezuz, J. Solomon, and M. Ben-Chen, "Reversible harmonic maps between discrete surfaces," *ACM Transactions on Graphics (TOG)*, vol. 38, no. 2, pp. 1-12, 2019.
- [30] P. Schmidt, M. Campen, J. Born, and L. Kobbelt, "Inter-surface maps via constant-curvature metrics," *ACM Transactions on Graphics (TOG)*, vol. 39, no. 4, pp. 119: 1-119: 15, 2020.
- [31] M. Ovsjanikov et al., "Computing and processing correspondences with functional maps," in *SIGGRAPH ASIA 2016 Courses*, 2016, pp. 1-60.
- [32] Y. Aflalo, H. Brezis, and R. Kimmel, "On the optimality of shape and data representation in the spectral domain," *SIAM Journal on Imaging Sciences*, vol. 8, no. 2, pp. 1141-1160, 2015.
- [33] A. Kovnatsky, K. Glashoff, and M. M. Bronstein, "MADMM: a generic algorithm for non-smooth optimization on manifolds," in *Computer Vision—ECCV 2016: 14th European Conference, Amsterdam, The Netherlands, October 11-14, 2016, Proceedings, Part V 14*, 2016: Springer, pp. 680-696.
- [34] Y. Choukroun, A. Shtern, A. Bronstein, and R. Kimmel, "Hamiltonian operator for spectral shape

- analysis," *IEEE transactions on visualization and computer graphics*, vol. 26, no. 2, pp. 1320-1331, 2018.
- [35] S. Melzi, E. Rodolà, U. Castellani, and M. M. Bronstein, "Localized manifold harmonics for spectral shape analysis," in *Computer Graphics Forum*, 2018, vol. 37, no. 6: Wiley Online Library, pp. 20-34.
- [36] S. Melzi, R. Marin, P. Musoni, F. Bardoni, M. Tarini, and U. Castellani, "Intrinsic/extrinsic embedding for functional remeshing of 3D shapes," *Computers & Graphics*, vol. 88, pp. 1-12, 2020.
- [37] G. Patané, "Laplacian spectral basis functions," *Computer aided geometric design*, vol. 65, pp. 31-47, 2018.
- [38] L. Cosmo, M. Panine, A. Rampini, M. Ovsjanikov, M. M. Bronstein, and E. Rodolà, "Isospectralization, or how to hear shape, style, and correspondence," in *Proceedings of the IEEE/CVF Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, 2019, pp. 7529-7538.
- [39] M. Eisenberger, Z. Löhner, and D. Cremers, "Divergence-Free Shape Correspondence by Deformation," in *Computer Graphics Forum*, 2019, vol. 38, no. 5: Wiley Online Library, pp. 1-12.
- [40] E. Küpçü and Y. Yemez, "Diffusion-based isometric depth correspondence," *Computer Vision and Image Understanding*, vol. 189, p. 102808, 2019.
- [41] M. M. Bronstein and I. Kokkinos, "Scale-invariant heat kernel signatures for non-rigid shape recognition," in *2010 IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, 13-18 June 2010 2010, pp. 1704-1711, doi: 10.1109/CVPR.2010.5539838.
- [42] F. Tombari, S. Salti, and L. Di Stefano, "Unique Signatures of Histograms for Local Surface Description," in *Computer Vision – ECCV 2010*, Berlin, Heidelberg, K. Daniilidis, P. Maragos, and N. Paragios, Eds., 2010// 2010: Springer Berlin Heidelberg, pp. 356-369.
- [43] D. Boscaini, J. Masci, E. Rodolà, M. M. Bronstein, and D. Cremers, "Anisotropic Diffusion Descriptors," *Computer Graphics Forum*, vol. 35, no. 2, pp. 431-441, 2016, doi: <https://doi.org/10.1111/cgf.12844>.
- [44] L. Cosmo, E. Rodola, M. M. Bronstein, A. Torsello, D. Cremers, and Y. Sahillioglu, "SHREC'16: Partial matching of deformable shapes," *Proc. 3DOR*, vol. 2, no. 9, p. 12, 2016.
- [45] M. Vestner *et al.*, "Efficient Deformable Shape Correspondence via Kernel Matching," in *2017 International Conference on 3D Vision (3DV)*, 10-12 Oct. 2017 2017, pp. 517-526, doi: 10.1109/3DV.2017.00065.
- [46] R. R. Coifman *et al.*, "Geometric diffusions as a tool for harmonic analysis and structure definition of data: Diffusion maps," *Proceedings of the National Academy of Sciences*, vol. 102, no. 21, pp. 7426-7431, 2005, doi: doi:10.1073/pnas.0500334102.
- [47] S. Salti, F. Tombari, and L. Di Stefano, "SHOT: Unique signatures of histograms for surface and texture description," *Computer Vision and Image Understanding*, vol. 125, pp. 251-264, 2014.
- [48] G. Shamai and R. Kimmel, "Geodesic distance descriptors," in *Proceedings of the IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, 2017, pp. 6410-6418.
- [49] M. Ovsjanikov, M. Ben-Chen, J. Solomon, A. Butscher, and L. Guibas, "Functional maps: a flexible representation of maps between shapes," *ACM Transactions on Graphics (ToG)*, vol. 31, no. 4, pp. 1-11, 2012.
- [50] D. Nogneng and M. Ovsjanikov, "Informative descriptor preservation via commutativity for shape matching," in *Computer Graphics Forum*, 2017, vol. 36, no. 2: Wiley Online Library, pp. 259-267.
- [51] E. Rodolà, L. Cosmo, M. M. Bronstein, A. Torsello, and D. Cremers, "Partial functional correspondence," in *Computer graphics forum*, 2017, vol. 36, no. 1: Wiley Online Library, pp. 222-236.
- [52] O. Litany, E. Rodolà, A. M. Bronstein, and M. M. Bronstein, "Fully spectral partial shape matching," in *Computer Graphics Forum*, 2017, vol. 36, no. 2: Wiley Online Library, pp. 247-258.
- [53] J. Ren, A. Poulernard, P. Wonka, and M. Ovsjanikov, "Continuous and orientation-preserving correspondences via functional maps," *ACM Transactions on Graphics (ToG)*, vol. 37, no. 6, pp. 1-16, 2018.
- [54] J.-M. Roufousse, A. Sharma, and M. Ovsjanikov, "Unsupervised deep learning for structured shape matching," in *Proceedings of the IEEE/CVF International Conference on Computer Vision*, 2019, pp. 1617-1627.
- [55] O. Halimi, O. Litany, E. R. Rodolà, A. M. Bronstein, and R. Kimmel, "Unsupervised Learning of Dense Shape Correspondence," in *2019 IEEE/CVF Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)*, 15-20 June 2019 2019, pp. 4365-4374, doi: 10.1109/CVPR.2019.00450.
- [56] E. Rodolà, M. Moeller, and D. Cremers, "Point-wise map recovery and refinement from functional

- correspondence," *arXiv preprint arXiv:1506.05603*, 2015.
- [57] E. Rodola, M. Möller, and D. Cremers, "Regularized pointwise map recovery from functional correspondence," in *Computer Graphics Forum*, 2017, vol. 36, no. 8: Wiley Online Library, pp. 700-711.
- [58] D. Ezuz and M. Ben-Chen, "Deblurring and denoising of maps between shapes," in *Computer Graphics Forum*, 2017, vol. 36, no. 5: Wiley Online Library, pp. 165-174.
- [59] M. Vestner, R. Litman, E. Rodola, A. Bronstein, and D. Cremers, "Product manifold filter: Non-rigid shape correspondence via kernel density estimation in the product space," in *Proceedings of the IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, 2017, pp. 3327-3336.
- [60] S. Melzi, J. Ren, E. Rodola, A. Sharma, P. Wonka, and M. Ovsjanikov, "Zoomout: Spectral upsampling for efficient shape correspondence," *arXiv preprint arXiv:1904.07865*, 2019.
- [61] G. Pai, J. Ren, S. Melzi, P. Wonka, and M. Ovsjanikov, "Fast sinkhorn filters: Using matrix scaling for non-rigid shape correspondence with functional maps," in *Proceedings of the IEEE/CVF Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, 2021, pp. 384-393.
- [62] O. Litany, T. Remez, E. Rodola, A. Bronstein, and M. Bronstein, "Deep functional maps: Structured prediction for dense shape correspondence," in *Proceedings of the IEEE international conference on computer vision*, 2017, pp. 5659-5667.
- [63] O. Halimi, O. Litany, E. Rodola, A. M. Bronstein, and R. Kimmel, "Unsupervised learning of dense shape correspondence," in *Proceedings of the IEEE/CVF Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, 2019, pp. 4370-4379.
- [64] N. Donati, E. Corman, and M. Ovsjanikov, "Deep orientation-aware functional maps: Tackling symmetry issues in shape matching," in *Proceedings of the IEEE/CVF Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, 2022, pp. 742-751.
- [65] D. Cao, P. Roetzer, and F. Bernard, "Unsupervised learning of robust spectral shape matching," *arXiv preprint arXiv:2304.14419*, 2023.
- [66] H. Chen and B. Bhanu, "3D free-form object recognition in range images using local surface patches," *Pattern Recognition Letters*, vol. 28, no. 10, pp. 1252-1262, 2007.
- [67] M. Botsch, L. Kobbelt, M. Pauly, P. Alliez, and B. Lévy, *Polygon mesh processing*. CRC press, 2010.
- [68] R. Jonker and T. Volgenant, "A shortest augmenting path algorithm for dense and sparse linear assignment problems," in *DGOR/NSOR: Papers of the 16th Annual Meeting of DGOR in Cooperation with NSOR/Vorträge der 16. Jahrestagung der DGOR zusammen mit der NSOR*, 1988: Springer, pp. 622-622.
- [69] Y. Li, H. Takehara, T. Taketomi, B. Zheng, and M. Nießner, "4dcomplete: Non-rigid motion estimation beyond the observable surface," in *Proceedings of the IEEE/CVF International Conference on Computer Vision*, 2021, pp. 12706-12716.
- [70] S. Zuffi, A. Kanazawa, D. W. Jacobs, and M. J. Black, "3D menagerie: Modeling the 3D shape and pose of animals," in *Proceedings of the IEEE conference on computer vision and pattern recognition*, 2017, pp. 6365-6373.
- [71] O. Azencot and R. Lai, "A Data-Driven Approach to Functional Map Construction and Bases Pursuit," in *Computer Graphics Forum*, 2021, vol. 40, no. 5: Wiley Online Library, pp. 97-110.
- [72] V. G. Kim, Y. Lipman, and T. Funkhouser, "Blended intrinsic maps," *ACM transactions on graphics (TOG)*, vol. 30, no. 4, pp. 1-12, 2011.
- [73] D. Morgan, G. P. Subramanian, S.-J. Chung, and F. Y. Hadaegh, "Swarm assignment and trajectory optimization using variable-swarm, distributed auction assignment and sequential convex programming," *The International Journal of Robotics Research*, vol. 35, no. 10, pp. 1261-1285, 2016.
- [74] R. Jonker and T. Volgenant, "Improving the Hungarian assignment algorithm," *Operations research letters*, vol. 5, no. 4, pp. 171-175, 1986.

## ضمیمه (الف) محاسبه و تحلیل پیچیدگی زمانی الگوریتم ۳ (LAPJV)

در این بخش پیچیدگی محاسباتی الگوریتم ۳ با ارایه شبه کد ++C تحلیل و محاسبه شده است. الگوریتم ۳ یا LAPJV شامل دو فرآیند مقدماتی و بهبود با اصلاحات اضافی است. فرآیند مقدماتی در سه مرحله، کاهش ستون (CRS)، انتقال کاهش (RTS) و کاهش ردیف تقویتی (ARRS) اجرا می‌شود [۶۸]. بنابراین، پیچیدگی زمانی هر دو فرآیند با مراحل مربوطه در نظر گرفته می‌شود. در مرحله کاهش ستون از فرآیند مقدماتی (خطوط ۲۹ تا ۳۸ شبه کد) دو حلقه تو در تو وجود دارد که یکی روی سطرها و دیگری روی ستون‌ها تکرار می‌شوند. هر تکرار شامل عملیات زمان ثابت است، بنابراین پیچیدگی زمانی مرحله کاهش ستون (CRS) برابر با  $O(n^2)$  است که  $n$  بعد ماتریس هزینه است. در مرحله انتقال کاهش (خطوط ۳۹ تا ۴۹ از شبه کد) نیز دو حلقه تو در تو وجود دارد که هر دو حلقه داخلی و بیرونی  $n$  بار و در مجموع منجر به  $n^2$  بار تکرار می‌شود. بنابراین، پیچیدگی زمانی مرحله انتقال کاهش (RTS) برابر با  $O(n^2)$  است. در مرحله کاهش ردیف تقویتی (خطوط ۵۰ تا ۷۷ شبه کد) از طریق هر عنصر ماتریس هزینه، تکرارها در دو حلقه تو در تو وجود دارد که باعث می‌شود پیچیدگی زمانی این مرحله از درجه دوم باشد. به عبارت دیگر، مرحله کاهش ردیف تقویتی (ARRS) برابر  $O(n^2)$  است. به همین ترتیب، پیچیدگی زمانی فرآیند بهبود با اصلاحات اضافی (خطوط ۷۸ تا ۱۱۸ شبه کد) در الگوریتم ۳ برابر  $O(n^3)$  است. در حالت کلی، مجموع پیچیدگی‌های محاسبه شده بیانگر پیچیدگی زمانی الگوریتم ۳ است. نتایج آزمایش‌ها نشان می‌دهند که پیچیدگی زمانی الگوریتم ۳ (LAPJV) بسیار کمتر از الگوریتم‌های مشابه مانند الگوریتم حراج [۷۳]، کوهن-مانکراس (KM) و نسخه بهبود یافته آن [۷۴] است، زیرا بیشتر انتساب‌های نقاط تا پایان فرآیند مقدماتی تکمیل می‌شوند و فقط درصد کمی از نقاط باقی می‌مانند که هنوز تخصیص نیافته‌اند و باید در فرآیند بهبود با اصلاحات اضافی استفاده شوند. در ادامه، دلیل پیچیدگی محاسباتی کم الگوریتم ۳ بررسی شده است. نتایج تخصیص و پیچیدگی زمانی فرآیندهای مقدماتی (شامل زیرمراحل CRS، RTS، ARR) و بهبود برای ۵۰۰۰ نقطه از ۱۰۰ جفت مدل محاسبه شده است. آمار انتساب‌ها در شکل ۱۰ نشان داده شده‌اند. میانگین درصد نقاط تخصیص یافته در فرآیندهای مقدماتی و بهبود به ترتیب، ۹۹/۹۹۸۷۴٪ و ۰/۰۰۱۲۶٪ محاسبه شده است. به عبارت دیگر، نتایج نشان می‌دهند که بیش از ۹۹/۹۹ درصد نقاط در فرآیند مقدماتی با پیچیدگی  $O(n^2)$  انتساب داده می‌شوند. بنابراین، فقط ۰/۰۰۱۲۶ درصد از نقاط مدل که هنوز تخصیص نیافته‌اند در فرآیند بهبود با پیچیدگی  $O(n^3)$  پردازش می‌شوند. بنابراین، فشرده‌ترین بخش الگوریتم LAPJV به فرآیند مقدماتی مربوط می‌شود. به طور میانگین، پیچیدگی محاسباتی الگوریتم LAPJV برابر  $O(n^2)$  است.



شکل ۱۰. مقایسه آماری تعداد انتساب نقاط برای ۵۰۰۰ نقطه (رأس). (الف) آمار تعداد انتساب‌ها بعد از مرحله کاهش ستون (CRS). (ب) آمار تعداد انتساب‌ها بعد از مرحله کاهش ستون (RTS). (پ) آمار تعداد انتساب‌ها بعد از مرحله کاهش ستون (ARRS). (ج) آمار تعداد انتساب‌ها بعد از فرآیند بهبود با اصلاحات اضافی.

```
1. #if !defined TRUE
2. #define TRUE 1
3. #endif
4. #if !defined FALSE
5. #define FALSE 0
6. #endif
7. /***** DATA TYPES *****/
8. typedef int boolean;
10. #define B 1e5
11. #define resolution 1e-4
12. /***** TYPES *****/
13. typedef int Row;
14. typedef int Col;
15. typedef double Cost;
16. Cost lap(int n, Cost **costofassign, Col *RowSol, Row *ColSol, Cost *u, Cost *v)
17. {
18. boolean unassign;
19. Row i, imin, numf = 0, prvnumf, f, i0, k, fRow, *pred, *fr;
20. Col j, j1, j2, endofp, last, low, up, *Collist, *match;
21. Cost min, h, umin, usubmin, v2, *d;
22. fr = new Row[n]; // لیستی از ردیف‌های تخصیص نیافته
23. Collist = new Col[n]; // لیستی از ستون‌های اسکن شده تخصیص نیافته
24. match = new Col[n]; // شمارش تعداد دفعاتی که یک ردیف تخصیص یافته
25. d = new Cost[n]; // متغیر فاصله برای محاسبه مسیر در فاز تقویت
26. pred = new Row[n]; // متغیر ردیف شمار برای ستون در فاز تقویت
    تعیین اینکه چند بار یک ردیف در مرحله کاهش ستون انتساب داده می‌شود.
27. for (i = 0; i < n; i++)
28. match[i] = 0;
    مرحله کاهش ستون
29. for (j = n-1; j >= 0; j--)
30. { min = costofassign[0][j]; imin = 0;
31. for (i = 1; i < n; i++)
32. if (costofassign[i][j] < min)
33. { min = costofassign[i][j]; imin = i;}
34. v[j] = min;
35. if (++match[imin] == 1)
36. { Rowsol[imin] = j; ColSol[j] = imin;}
```

```
37. else
38. Colsol[j] = -1;}
```

مرحله انتقال کاهش

```
39. for (i = 0; i < n; i++)
40. if (match[i] == 0)
41. fr[numf++] = i;
42. else
43. if (match[i] == 1)
44. { j1 = Rowsol[i]; min = B;
45. for (j = 0; j < n; j++)
46. if (j != j1)
47. if (costofassign[i][j] - v[j] < min)
48. min = costofassign[i][j] - v[j]; v[j1] = v[j1] - min;
49. }
```

مرحله کاهش ردیف تقویتی

```
50. int loopcnt = 0;
51. do
52. { loopcnt++; k = 0; prvnumf = numf; numf = 0;
53. while (k < prvnumf)
54. { i = fr[k]; k++; umin = costofassign[i][0] - v[0]; j1 = 0; usubmin = B;
55. for (j = 1; j < n; j++)
56. { h = costofassign[i][j] - v[j];
57. if (h < usubmin)
58. if (h >= umin)
59. { usubmin = h; j2 = j; }
60. else
61. { usubmin = umin; umin = h; j2 = j1; j1 = j; }
62. }
63. i0 = Colsol[j1];
64. if (usubmin - umin > resolution)
65. v[j1] = v[j1] - (usubmin - umin);
66. else
67. if (i0 >= 0)
68. { j1 = j2; i0 = Colsol[j2]; }
69. Rowsol[i] = j1; Colsol[j1] = i;
70. if (i0 >= 0)
71. if (usubmin - umin > resolution)
72. fr[--k] = i0;
73. else
74. fr[numf++] = i0;
75. }
76. }
77. while (loopcnt < 2);
```

فاز بهبود با اصلاحات اضافی برای ردیف‌های تخصیص نیافته

```
78. for (f = 0; f < numf; f++)
79. { fRow = fr[f];
80. for (j = 0; j < n; j++)
81. { d[j] = costofassign[fRow][j] - v[j]; pred[j] = fRow; Collist[j] = j; }
82. low = 0; up = 0; unassign = FALSE;
83. do
```

```
84. {
85.   if (up == low)
86.     { last = low - 1; min = d[Collist[up++]];
87.       for (k = up; k < n; k++)
88.         { j = Collist[k]; h = d[j];
89.           if (h <= min)
90.             {
91.               if (h < min)
92.                 { up = low; min = h; }
93.               Collist[k] = Collist[up]; Collist[up++] = j; }
94.             }
95.           for (k = low; k < up; k++)
96.             if (Colsol[Collist[k]] < 0)
97.               { endofp = Collist[k]; unassign = TRUE; break; }
98.           }
99.         if (!unassign)
100.          {
```

به روز رسانی فاصله بین متغیر فاصله (fRow) و تمام ستون‌های اسکن نشده توسط ستون اسکن شده بعدی

```
101.   j1 = Collist[low]; low++; i = Colsol[j1]; h = costofassign[i][j1] - v[j1] - min;
102.   for (k = up; k < n; k++)
103.     {
104.       j = Collist[k]; v2 = costofassign[i][j] - v[j] - h;
105.       if (v2 < d[j])
106.         {
107.           pred[j] = i;
108.           if (v2 == min)
109.             if (Colsol[j] < 0)
110.               { endofp = j; unassign = TRUE; break; }
111.           else
112.             { Collist[k] = Collist[up]; Collist[up++] = j; }
113.           d[j] = v2;
114.         }
115.     }
116.   }
117. }
118. while (!unassign);
```

به روز رسانی ارزش ستون‌ها

```
119. for (k = 0; k <= last; k++)
120. {
121.   j1 = Collist[k]; v[j1] = v[j1] + d[j1] - min; }
122. do
123. { i = pred[endofp]; Colsol[endofp] = i; j1 = endofp; endofp = Rowsol[i]; Rowsol[i] = j1; }
124. while (i != fRow);
125. }
```

محاسبه هزینه بهینه

```
126. Cost lapCost = 0;
127. for (i = 0; i < n; i++)
128. { j = Rowsol[i]; u[i] = costofassign[i][j] - v[j]; lapCost = lapCost + costofassign[i][j]; }
129. delete[] pred; delete[] fr; delete[] Collist; delete[] match; delete[] d;
130. return lapCost; }
```