



Sahand University
of Technology

DOR:

[20.1001.1.23223146.1405.12.2.5.4](https://doi.org/10.1001.1.23223146.1405.12.2.5.4)

**Journal of Nonlinear
Systems in Electrical
Engineering**

Vol. 12, No. 2

Autumn and Winter 2025

ISSN: 2322 – 3146

<http://jnsee.sut.ac.ir>

Robust Adaptive Fuzzy Sliding Mode Control for Synchronization of Unknown Noncanonical Chaotic Systems

Mohammad Safari Souri, Seyed Kamaledin Mousavi Mashhadi, Mohammad Fiuzy*

Control Department, School of Electrical Engineering, Iran University of Science and Technology

* Corresponding author email: mohammad.fiuzy@yahoo.com

Abstract

This paper presents the design and implementation of a robust adaptive fuzzy sliding mode controller for the synchronization of non-canonical chaotic systems. Unlike most conventional approaches reported in the literature, the system dynamics are assumed to be completely unknown, and no prior information or bounds on uncertainties, external disturbances, or unknown parameters are required. The proposed control strategy employs an Adaptive Neuro-Fuzzy Inference System (ANFIS) to approximate and identify the unknown chaotic system dynamics in an online manner. Subsequently, a sliding mode control law is developed to ensure accurate and stable synchronization between the drive and response systems. To rigorously analyze the closed-loop behavior, the asymptotic stability of the overall system and the convergence of the synchronization error are mathematically guaranteed using Lyapunov stability theory. Numerical simulation results conducted on the Lorenz and Chen chaotic systems demonstrate the effectiveness, high accuracy, and strong robustness of the proposed method in the presence of external disturbances and unbounded uncertainties, highlighting its potential for practical engineering applications.

Keywords

Chaos synchronization; Robust adaptive sliding mode control; Adaptive neuro-fuzzy inference system (ANFIS); Non-canonical chaotic systems; Lyapunov stability; Unbounded uncertainties

1. Short Introduction

Chaos theory has attracted significant attention due to the complex and unpredictable behavior of nonlinear chaotic systems. Synchronization of chaotic systems, first introduced by Carroll and Pecora, has become essential in various engineering applications, with numerous methods such as sliding mode control, adaptive control, and fuzzy control proposed in the literature. Despite these advances, many existing approaches assume bounded uncertainties or fully known system dynamics. This paper proposes a robust adaptive fuzzy sliding mode control strategy capable of synchronizing chaotic systems in the presence of external disturbances and unbounded uncertainties. The effectiveness of the method is validated through several simulation examples involving different chaotic systems.

2. Proposed Work

This study introduces an adaptive fuzzy sliding mode control strategy for synchronizing chaotic systems under external disturbances and unbounded uncertainties. The controller design integrates multiple linear sliding surfaces with an adaptive switching law, while an adaptive neuro-fuzzy network is employed to identify unknown nonlinearities without requiring prior bounds. Stability of the synchronization scheme is rigorously proven using Lyapunov theory, ensuring asymptotic convergence of the synchronization error. To demonstrate the effectiveness and robustness of the proposed method, three simulation scenarios are conducted: synchronization of the Chen system with different initial conditions, synchronization of the Lorenz system with different initial conditions, and cross-synchronization between the Chen and Lorenz systems. The results confirm that the proposed controller achieves fast convergence, strong robustness against disturbances, and superior performance compared to conventional sliding mode approaches.

3. Conclusion

This paper introduced a novel adaptive fuzzy sliding mode control approach for synchronizing non-canonical chaotic systems under uncertainties and disturbances. The stability of the proposed method was rigorously established through Lyapunov theory, and the adaptive neuro-fuzzy structure successfully estimated unknown system parameters. Using adaptive rules, the required control input for achieving synchronization was derived. Numerical simulations involving Chen–Chen, Lorenz–Lorenz, and Chen–Lorenz synchronization scenarios confirmed the robustness and effectiveness of the proposed strategy.

سنکرون سازی سیستم های آشوبناک غیر کانونیکال نامعلوم با استفاده از کنترل مود لغزشی تطبیقی-فازی مقاوم

محمد صفری سوری، سید کمال الدین موسوی مشهدی، محمد فیوضی *

گروه کنترل، دانشکده مهندسی برق، دانشگاه علم و صنعت ایران

* آدرس پست الکترونیکی نویسنده مسئول: mohammad.fiuzy@yahoo.com



دانشگاه صنعتی شاهرود

DOR:

[20.1001.1.23223146.1405.12.2.5.4](https://doi.org/10.1001.1.23223146.1405.12.2.5.4)

نشریه علمی-فصلنامه «مهندسی برق»

دوره ۱۲ - شماره ۲

پاییز و زمستان ۱۴۰۴

صفحات ۸۷ الی ۱۰۸

ISSN: 2322-3146

<http://jnsee.sut.ac.ir>

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۵/۶/۹

تاریخ بازنگری: ۱۴۰۵/۵/۲۷

تاریخ ارسال: ۱۴۰۴/۱۱/۸

چکیده

واژه های کلیدی

سنکرون سازی آشوب

کنترل مود لغزشی تطبیقی

سیستم استنتاج عصبی-فازی

سیستم های غیر کانونیکال

پایداری لیاپانوف

نامعینی نامحدود

این مقاله به طراحی و پیاده سازی یک کنترل کننده مود لغزشی تطبیقی-فازی مقاوم برای سنکرون سازی سیستم های آشوبناک غیر کانونیکال می پردازد. برخلاف اغلب رویکردهای سنتی در ادبیات کنترل، در این پژوهش اگرچه دینامیک سیستم نامعلوم فرض شده، اما عدم قطعیت ها، اغتشاشات خارجی و پارامترهای ناشناخته همگی کران دار در نظر گرفته شده اند. راهبرد کنترلی پیشنهادی با بهره گیری از سیستم استنتاج عصبی-فازی تطبیقی ابتدا به تقریب و شناسایی برخط مدل سیستم آشوبناک پرداخته و سپس با اعمال قوانین کنترلی مود لغزشی، سنکرون سازی دقیق و پایدار میان سیستم های مرجع و پاسخ را تضمین می کند. همچنین پایداری مجانبی سیستم حلقه بسته و همگرایی خطای سنکرون سازی بر اساس تئوری پایداری لیاپانوف به صورت ریاضی اثبات شده است. در نهایت، شبیه سازی های عددی بر روی سیستم های آشوبناک لورنز و چن، عملکرد مطلوب، دقت بالا و مقاوم بودن روش پیشنهادی را در حضور اغتشاشات و عدم قطعیت ها تأیید می کنند.

۱- مقدمه

تئوری آشوب و بررسی رفتار سیستم های دینامیکی غیرخطی پیچیده از موضوعات بنیادین و پر کاربرد در حوزه مهندسی و علوم پایه است. از زمان معرفی اولین سیستم آشوبناک توسط لورنز [۱] و توسعه سیستم های غیرخطی بعدی [۴-۲] مسئله کنترل و دستکاری رفتار آشوبی به یکی از زمینه های جذاب پژوهشی تبدیل شده است. در این میان، سنکرون سازی سیستم های آشوبناک به دلیل نقش کلیدی آن در حوزه های متنوعی همچون مهندسی شیمی [۵]، پردازش اطلاعات [۶] و مخابرات امن [۷، ۸] اهمیت مضاعفی یافته است. مفهوم سنکرون سازی نخستین بار توسط کارول و پکورا [۹] مطرح شد که هدف آن همگام سازی پاسخ سیستم پیرو (Slave) با سیستم مرجع (Master) است. با این حال، ویژگی های ذاتی سیستم های آشوبناک مانند حساسیت شدید به شرایط اولیه و وابستگی بالا به پارامترهای مدل، طراحی روش های سنکرون سازی مقاوم و دقیق را با چالش های اساسی مواجه می سازد [۱۰].

برای غلبه بر این چالش ها، روش های کنترلی متعددی از جمله کنترل تطبیقی [۱۱]، کنترل فازی [۱۲، ۱۳]، مشاهده گرهای حالت [۱۴، ۱۵] و کنترل پیش بین [۱۶] پیشنهاد شده اند. در این میان، کنترل مود لغزشی (SMC) به دلیل سادگی در پیاده سازی و مقاومت ذاتی در برابر نامعینی ها و اغتشاشات، جایگاه ویژه ای در سنکرون سازی سیستم های غیرخطی یافته است [۲۰-۱۷]. با وجود این مزایا، کنترل مود لغزشی کلاسیک با دو محدودیت ساختاری عمده روبه رو است: پدیده نوسانات شدید یا چترینگ (Chattering) ناشی از توابع ناپیوسته سوئیچینگ [۲۱]، و نیاز به دانستن کران بالایی عدم قطعیت ها و اغتشاشات خارجی جهت تنظیم ضرایب کنترلی.

مرور کارهای گذشته نشان می دهد که اکثر روش های ارائه شده برای سنکرون سازی، یا کارایی آن ها منوط به محدود بودن و مشخص بودن کران عدم قطعیت ها است [۲۲، ۲۳] و یا سیستم را کاملاً معین فرض کرده اند [۲۴]. همچنین در برخی پژوهش ها برای کاهش چترینگ از سیستم های فازی استفاده شده اما دامنه فرضیات مسئله به کلاس خاصی از سیستم ها (مانند سیستم های کانونیکال مرتبه دوم) محدود گردیده است [۲۶-۲۴]. در کاربردهای واقعی، تعیین کران دقیق عدم قطعیت ها و اغتشاشات ناممکن است و بزرگ در نظر گرفتن تخمینی این کران ها، موجب تشدید شدید پدیده چترینگ و فشار به عملگرها می شود.

با توجه به شکاف های تحقیقاتی فوق، انگیزه اصلی این مقاله ارائه یک راهبرد کنترلی جامع، مقاوم و بدون نیاز به اطلاعات پیشین از کران عدم قطعیت ها است. در این راستا، یک کنترل کننده مود لغزشی تطبیقی-فازی مبتنی بر شبکه عصبی-فازی تطبیقی (ANFIS) برای سنکرون سازی سیستم های آشوبناک در حضور اغتشاشات خارجی و عدم قطعیت های با کران ناشناخته طراحی می شود.

نوآوری ها و ویژگی های برجسته روش پیشنهادی عبارتند از:

تخمین برخط عدم قطعیت ها: استفاده از شبکه عصبی-فازی تطبیقی جهت تقریب دقیق و برخط عدم قطعیت های سیستم بدون نیاز به دانستن کران بالایی آن ها.

حذف پدیده چترینگ: بهره گیری از قوانین سوئیچینگ تطبیقی و ترکیب آن با ساختار فازی به منظور هموار سازی سیگنال کنترلی.

تضمین پایداری ریاضی: اثبات پایداری مجانبی و همگرایی خطای سنکرون سازی به صفر بر اساس تئوری پایداری لیاپانوف.

ادامه این مقاله به شرح زیر سازمان دهی شده است: در بخش ۲، مفاهیم پایه و ساختار شبکه ANFIS مرور می شود. در بخش ۳، مدل سازی مسئله، فرضیات و مراحل طراحی کنترل کننده به همراه اثبات ریاضی پایداری ارائه می گردد. در بخش ۴، جهت ارزیابی کارایی روش پیشنهادی، شبیه سازی های عددی بر روی سیستم های آشوبناک لورنز و چن (در حالت های شرایط اولیه متفاوت و سیستم های ناهمسان) انجام می پذیرد. در نهایت، بخش ۵ به جمع بندی و ارائه نتایج اختصاص یافته است.

۲- مقدمات

در این بخش، مروری مختصر بر مبانی شبکه های عصبی تطبیقی-فازی ارائه می شود که مطالب آن با بهره گیری از مباحث ارائه شده در مراجع [۲۷-۳۱] تدوین شده است. سیستم های فازی و سیستم های عصبی هر کدام به نوبه خود دارای نواقصی هستند. سیستم های استنتاج فازی با توجه توانایی استفاده از تجربیات فرد خبره، می توانند در کنترل حالت های مختلف یک سیستم کنترلی مورد استفاده قرار گیرند. اما به دلیل عدم توانایی تغییر توابع عضویت ورودی و خروجی، نمی توانند با استفاده از داده های ورودی و خروجی تغییراتی را در توابع عضویت ایجاد کنند که موجب بهبود عملکرد کنترلی شود. در عوض شبکه های عصبی نیز توانایی استفاده از قواعد زبانی را ندارند، از این رو این سیستم ها نیز انعطاف لازم را برای استفاده در سیستم های کنترلی ندارند. سیستم استنتاج عصبی تطبیقی-فازی نوعی شبکه مصنوعی است که بر اساس سیستم فازی تاکاگی-سوگنو است. این سیستم قابلیت یادگیری برای تقریب زدن توابع غیر خطی را دارد. سیستم استنتاج عصبی تطبیقی-فازی بر پایه مجموعه ای از قواعد اگر-آنگاه زبانی عمل می کند. گره های تطبیقی موجود در شکل ۱ دارای پارامترهایی هستند که توسط الگوریتم یادگیری به گونه ای تنظیم می شوند که شبکه عصبی تطبیقی-فازی بتواند رفتار توابع غیر خطی را با دقت مورد نظر تعیین کند. برای یک سیستم استنتاج فازی تاکاگی-سوگنو یک قانون اگر-آنگاه فازی برای شبکه های استنتاج عصبی تطبیقی-فازی به صورت زیر بیان می شود:

$$R^{(l)}: IF \quad x_1 \text{ is } A_{1l}, \text{ and...and } x_n \text{ is } A_{nl}, THEN \quad y_l = p_{0l} + p_{1l}x_1 + \dots + p_{nl}x_n = \underline{\theta}_l^T \begin{bmatrix} 1 & \underline{x}^T \end{bmatrix}^T \quad (1)$$

که A_{il} مجموعه های فازی و $\underline{\theta}_l^T = [p_{0l} \quad p_{1l} \quad \dots \quad p_{nl}]$ بردار ضرایب قابل تنظیم قانون فازی است که توسط قواعد تطبیقی تنظیم می شود. $\mathcal{V}_l$ متغیر زبانی خروجی است موتور استنتاج فازی از ترکیب قواعد اگر-آنگاه موجود در پایگاه قواعد، متغیرهای زبانی ورودی $\underline{x}^T = [x_1, x_2, \dots, x_n]$ را به آن نگاشت می دهد. باید توجه کرد که برای سیستم تاکاگی-سوگنو $x_i, y_i \in \mathbb{R} \quad i = 1, \dots, n$ است. در صورتی که تعداد قواعد اگر-آنگاه فازی برابر M فرض شود برای غیر فازی سازی سیستم فازی با استفاده از غیر فازی کننده میانگین مرکزی داریم:

$$y(x) = \frac{\sum_{l=1}^M v_l \cdot y_l}{\sum_{l=1}^M v_l} = \frac{\sum_{l=1}^M v_l \cdot \underline{\theta}_l^T \begin{bmatrix} 1 & \underline{x}^T \end{bmatrix}^T}{\sum_{l=1}^M v_l} \quad (2)$$

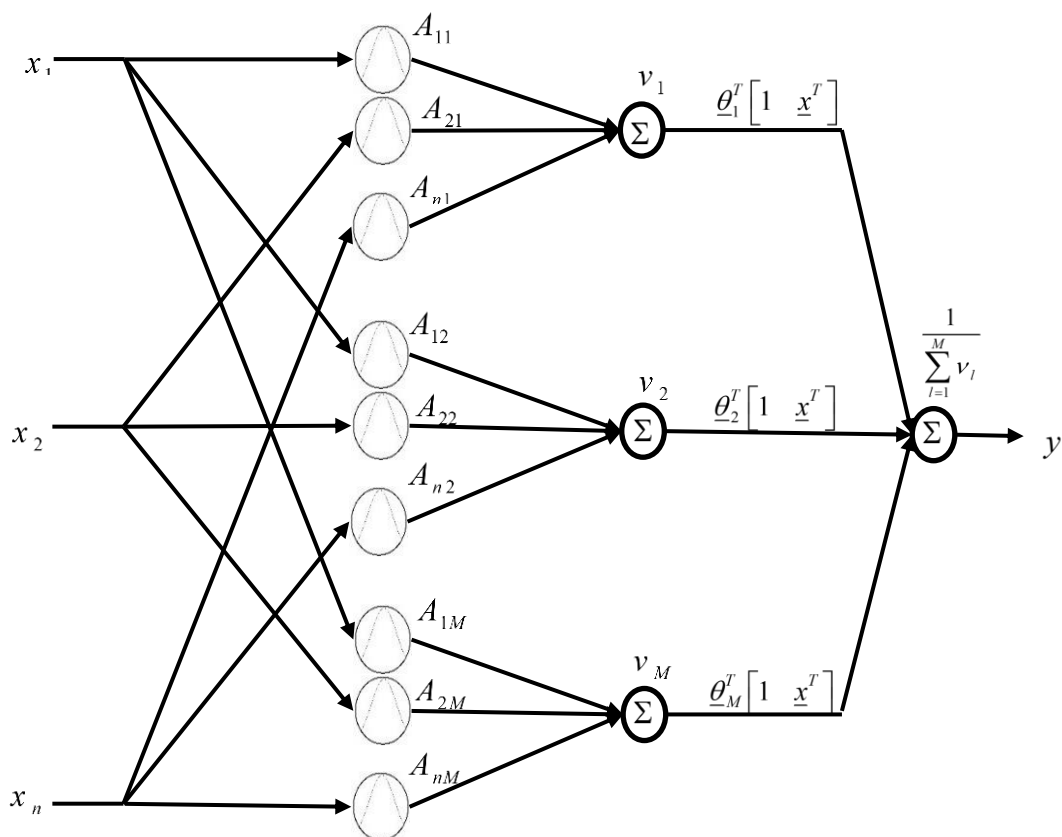
که $v_l = \prod_{i=1}^n \mu_{A_{il}}(x_i)$ مقدار درستی l امین قاعده اگر-آنگاه است و $\mu_{A_{il}}(x_i)$ برابر مقدار تابع عضویت متغیر x_i است. رابطه (۲) را می توان به صورت زیر نیز بیان کرد:

$$y(x) = \underline{\theta}^T \phi(x) \quad (۳)$$

که $\underline{\theta}^T = [\underline{\theta}_1^T \quad \underline{\theta}_2^T \quad \dots \quad \underline{\theta}_M^T]$ پارامترهای قابل تنظیم و $\phi^T(\underline{x}) = [\phi_1(\underline{x}) \quad \phi_2(\underline{x}) \quad \dots \quad \phi_M(\underline{x})]$ تابع فازی اصلی است و به صورت زیر تعریف می شود:

$$\phi_l(\underline{x}) = \frac{v_l \cdot [1 \quad \underline{x}^T]^T}{\sum_{l=1}^M v_l} \quad (۴)$$

سیستم فازی رابطه (۲) یک تقریب زننده ی عمومی برای توابع غیر خطی خوش رفتار است [۳۲] و می تواند دینامیک های ناشناخته ی سیستم های آشوبناک را بر اساس داده های ورودی-خروجی با دقت بالا تخمین بزند. ساختار این تقریب زننده، که در طراحی کنترل کننده مورد استفاده قرار می گیرد، در قالب شبکه ی عصبی-فازی تاکاگی-سوگنو در شکل ۱ نمایش داده شده است.



شکل ۱: بلوک دیاگرام شبکه عصبی تطبیقی-فازی

۳- سنکرون سازی سیستم های آشوبناک غیر کانونیکال با استفاده از روش کنترل مود

لغزشی تطبیقی-فازی

به منظور سنکرون سازی سیستم های آشوبناک یک سیستم به عنوان سیستم مرجع و یک سیستم به عنوان سیستم پیرو در نظر گرفته می شود. هدف از این روش این است که ورودی کنترلی به گونه ای تعیین شود تا سیستم پیرو رفتار مشابه سیستم مرجع را از خود ارائه دهد. سیستم آشوبناک غیر کانونیکال زیر را به عنوان سیستم مرجع در نظر بگیرید:

$$\dot{x}(t) = f(x, t) \quad (5)$$

که $x(t) = [x_1(t) \ \cdots \ x_n(t)]^T$ و همچنین داریم که $f(x, t) = [f_1(x, t) \ \cdots \ f_n(x, t)]^T$ است. معادلات سیستم پیرو به صورت زیر در نظر گرفته می شود:

$$\dot{y}(t) = g(y, t) + u(t) + d(t) \quad (6)$$

که $y(t) = [y_1(t) \ \cdots \ y_n(t)]^T$ و $g(y, t) = [g_1(y, t) \ \cdots \ g_n(y, t)]^T$ و $u(t) = [u_1(t) \ \cdots \ u_n(t)]^T$ ورودی کنترلی در نظر گرفته شده و $d(t) = [d_1(t) \ \cdots \ d_n(t)]^T$ اغتشاش محدود است. خطا را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$e(t) = y(t) - x(t) \quad (7)$$

دینامیک خطا برابر است با:

$$\dot{e}(t) = g(y, t) + d(t) + u(t) - f(x, t) \quad (8)$$

در رابطه (۸)، $f(x, t)$ و $g(y, t)$ دو تابع غیر خطی و نامعلوم اما محدود هستند، در حقیقت، فرض می شود که توابع نامعلوم $f(x, t)$ و $g(y, t)$ روی ناحیه ی کاری سیستم، یعنی مجموعه ی کراندار Ω_x ، دارای کران بالا هستند. به صورت دقیق، تابع f محدود است اگر عدد مثبتی مانند M_f وجود داشته باشد به طوری که $|f(x, t)| \leq M_f \ \forall x \in \Omega_x$ به طور مشابه، تابع g محدود است اگر $|g(x, t)| \leq M_g \ \forall x \in \Omega_x$. از آنجا که دینامیک های سیستم های آشوبناک چن و لورنز پیوسته هستند و مسیر حالت ها در تمامی شبیه سازی ها در یک ناحیه ی کراندار قرار می گیرند، توابع نامعلوم f و g نیز روی این ناحیه محدود خواهند بود. این ویژگی امکان استفاده از تقریب زننده ی عصبی-فازی و تضمین پایداری لیاپانوف را فراهم می کند. در صورتی که صفحات لغزشی را به صورت:

$$S_i(t) = k_i e_i(t), \quad i = 1, \dots, n \quad (9)$$

در نظر بگیریم، برای کنترل سیستم با استفاده از روش مود لغزشی می بایست از چند سطح لغزشی استفاده کرد. کنترل مود لغزشی به دو فاز تقسیم می شود. زمانی که $S_i(t) = 0$ و در فاز لغزشی^۱ هستیم و زمانی که $S_i(t) \neq 0$ یعنی در فاز رسیدن^۲ هستیم. در صورتی که در فاز رسیدن باشیم باید $\dot{S}_i(t) = 0$ باشد.

$$\dot{S}_i(t) = k_i \dot{e}_i(t), \quad i = 1, \dots, n \quad (10)$$

با جایگذاری (۸) در (۱۰) داریم:

$$\dot{S}_i(t) = k_i (g_i(y, t) - f_i(x, t) + u_i(t) + d_i(t)) = 0 \quad (11)$$

در نتیجه با توجه به رابطه (۱۱) نیروی کنترلی معادل برابر است با:

$$u_{eq,i}(t) = f_i(x, t) - g_i(y, t) + d_i(t), \quad i = 1, \dots, n \quad (12)$$

و همچنین شرط کافی برای تضمین این که خطای سنکرون سازی، از فاز رسیدن به فاز لغزشی برسد برابر است با:

$$S_i(t) \dot{S}_i(t) \leq -\eta_i |S_i(t)| \leq 0, \quad i = 1, \dots, n \quad (13)$$

به منظور این که شرط لغزشی علیرغم عدم قطعیت در دینامیک g_i برقرار بوده و بر روی $S_i = 0$ باقی بماند باید یک جمله ناپیوسته به کنترل معادل اضافه شود، از این رو رابطه (۱۲) برابر است با:

$$u_i(t) = f_i(x, t) - g_i(y, t) - \eta_i \text{sign}(S_i(t)), \quad i = 1, \dots, n \quad (14)$$

که η_i یک ثابت مثبت است که شرط رسیدن به حالت لغزشی را تضمین می کند و برای تضمین شرط رسیدن داریم:

$$\eta_i > |d_i(t)| + |\omega_i(t)|, \quad i = 1, \dots, n \quad (15)$$

که ω_i حداقل خطای تخمین است. می دانیم که توابع $f_i(x, t)$ و $g_i(y, t)$ تابعی نامعلوم هستند و باید توسط سیستم های استنتاج فازی جایگزین شوند:

$$f_i(x | \underline{\theta}_{f_i}) = \underline{\theta}_{f_i}^T \underline{\xi}_i(x), \quad i = 1, \dots, n \quad (16)$$

$$g_i(y | \underline{\theta}_{g_i}) = \underline{\theta}_{g_i}^T \underline{\xi}_i(y), \quad i = 1, \dots, n \quad (17)$$

که $\underline{\theta}_{g_i}^T$ و $\underline{\theta}_{f_i}^T$ ضرایب قابل تنظیم توسط سیستم استنتاج فازی هستند. پس ورودی کنترلی برابر است با:

¹ Sliding Phase

² Reaching Phase

$$u_i(t) = f_i(x | \underline{\theta}_{f_i}) - g_i(y | \underline{\theta}_{g_i}) - \eta_i \text{sign}(S_i(t)), \quad i = 1, \dots, n \quad (18)$$

قضیه: در صورتی که معادلات حالت یک سیستم آشوبناک به صورت غیر کانونیکال و معادل با معادله (۶) باشد که در اینجا $g(y, t)$ برداری از توابع نامعلوم و $d(t)$ بردار اغتشاش ورودی و محدود است، آنگاه می توان پاسخ خروجی این سیستم را با یک ورودی کنترلی مشابه (۱۸) به سیستم با معادله (۵) رساند که $f(x, t)$ برداری از توابع نامعلوم است. که توابع $f(x, t)$ و $g(y, t)$ توسط سیستم عصبی-تطبیقی-فازی تخمین زده می شوند. این همگرایی به ازای هر $i = 1, \dots, n$ با شرایط:

$$\frac{d\tilde{\theta}_{f_i}}{dt} = a_i S_i(t) \underline{\xi}_i(x), \quad a_i > 0 \quad (19)$$

$$\frac{d\tilde{\theta}_{g_i}}{dt} = -b_i S_i(t) \underline{\xi}_i(y), \quad b_i > 0 \quad (20)$$

امکان پذیر است، که a_i و b_i پارامترهای اختیاری هستند که توسط طراح تنظیم می شوند. شرایط (۱۹) و (۲۰) پایدارمجبانی بودن روش پیشنهادی را تضمین می کنند.

اثبات: در ابتدا فرض میکنیم که $\underline{\theta}_{f_i}^*$ و $\underline{\theta}_{g_i}^*$ مقادیر بهینه هستند که به صورت روابط (۲۱) و (۲۲) تعریف می شوند:

$$\underline{\theta}_{f_i}^* = \arg \min_{\underline{\theta}_{f_i} \in \Omega_{f_i}} \left(\sup_{x \in \Omega_x} |f_i(x | \underline{\theta}_{f_i}) - f_i(x, t)| \right) \quad (21)$$

$$\underline{\theta}_{g_i}^* = \arg \min_{\underline{\theta}_{g_i} \in \Omega_{g_i}} \left(\sup_{y \in \Omega_y} |g_i(y | \underline{\theta}_{g_i}) - g_i(y, t)| \right) \quad (22)$$

که Ω_{f_i} ، Ω_{g_i} ، Ω_x و Ω_y مقادیر مثبت هستند که محدودید روی $\underline{\theta}_{f_i}$ ، $\underline{\theta}_{g_i}$ ، x و y را تعیین می کنند و به صورت $\Omega_y = \{y | \|y\| \leq M_y\}$ و $\Omega_x = \{x | \|x\| \leq M_x\}$ ، $\Omega_{g_i} = \{\underline{\theta}_{g_i} | \|\underline{\theta}_{g_i}\| \leq M_{g_i}\}$ ، $\Omega_{f_i} = \{\underline{\theta}_{f_i} | \|\underline{\theta}_{f_i}\| \leq M_{f_i}\}$ تعریف می شوند که M_y ، M_x ، M_{g_i} ، M_{f_i} ثابت های مثبت هستند. برای صفحه لغزشی i ام از روابط (۸)، (۹) و (۱۸) داریم:

$$\dot{S}_i(t) = k_i \dot{e}_i(t) = k_i (g_i(y, t) - f_i(x, t) + f_i(x | \underline{\theta}_{f_i}) - g_i(y | \underline{\theta}_{g_i}) - \eta_i \text{sign}(S_i(t)) + d_i(t)) \quad (23)$$

با جایگذاری (۱۶)، (۱۷)، (۲۱) و (۲۲) در رابطه (۲۳) داریم:

$$\dot{S}_i(t) = k_i \left((\underline{\theta}_{g_i}^{*T} - \underline{\theta}_{g_i}^T) \underline{\xi}_i(y) - (\underline{\theta}_{f_i}^{*T} - \underline{\theta}_{f_i}^T) \underline{\xi}_i(x) - \eta_i \text{sign}(S_i(t)) + d_i(t) + \omega_i(t) \right) \quad (24)$$

که در رابطه (۲۴)، $\omega_i(t)$ حداقل خطای تخمین است:

$$\omega_i(t) = g_i(y, t) - g_i(y | \underline{\theta}_{g_i}^*) - (f_i(x, t) - f_i(x | \underline{\theta}_{f_i}^*)) \quad (25)$$

که مشتق مرتبه اول از صفحات لغزشی برابر است با:

$$\dot{S}_i(t) = k_i \left(\tilde{\underline{\theta}}_{g_i} \underline{\xi}_i(y) - \tilde{\underline{\theta}}_{f_i} \underline{\xi}_i(x) - \eta_i \text{sign}(S_i(t)) + d_i(t) + \omega_i(t) \right) \quad (26)$$

که $\tilde{\underline{\theta}}_{f_i} = \underline{\theta}_{f_i}^* - \underline{\theta}_{f_i}$ و $\tilde{\underline{\theta}}_{g_i} = \underline{\theta}_{g_i}^* - \underline{\theta}_{g_i}$ هستند. به منظور اثبات پایداری سیستم یک تابع لیپانوف به صورت زیر در نظر می گیریم:

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(S_i^2 + \frac{k_i}{a_i} \tilde{\underline{\theta}}_{f_i}^T \tilde{\underline{\theta}}_{f_i} + \frac{k_i}{b_i} \tilde{\underline{\theta}}_{g_i}^T \tilde{\underline{\theta}}_{g_i} \right) \quad (27)$$

که در آن به ازای هر $i = 1, \dots, n$ ، $a_i > 0$ و $b_i > 0$ هستند. با مشتق گیری از (۲۷) داریم:

$$\dot{V} = \sum_{i=1}^n S_i \dot{S}_i + \sum_{i=1}^n k_i \left(\frac{1}{a_i} \left(\frac{d \tilde{\underline{\theta}}_{f_i}^T}{dt} \right) \tilde{\underline{\theta}}_{f_i} + \frac{1}{b_i} \left(\frac{d \tilde{\underline{\theta}}_{g_i}^T}{dt} \right) \tilde{\underline{\theta}}_{g_i} \right) \quad (28)$$

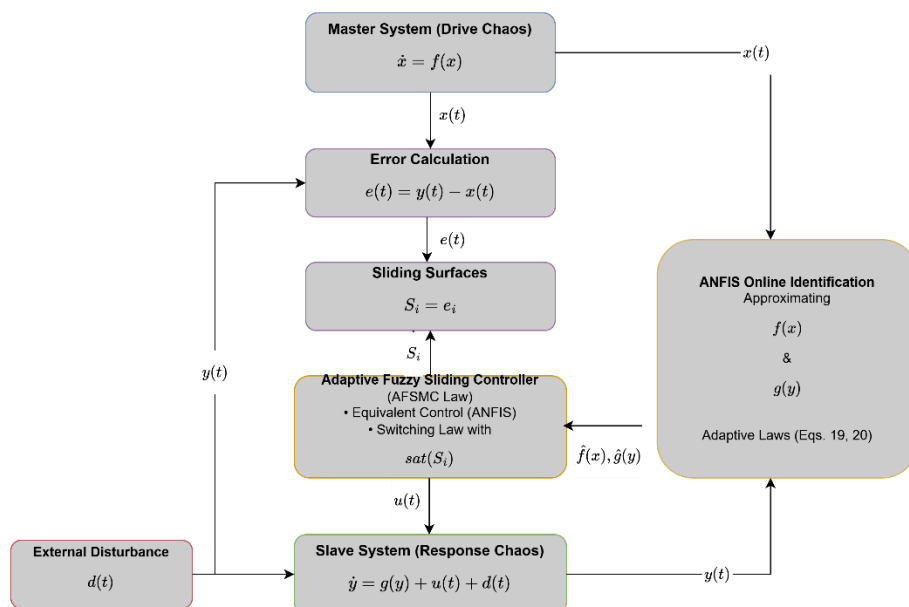
با جایگذاری (۲۶) در (۲۸) داریم:

$$\dot{V} = \sum_{i=1}^n k_i S_i \left(\tilde{\underline{\theta}}_{g_i} \underline{\xi}_i(y) - \tilde{\underline{\theta}}_{f_i} \underline{\xi}_i(x) - \eta_i \text{sign}(S_i(t)) + d_i(t) + \omega_i(t) \right) + \sum_{i=1}^n \frac{k_i}{a_i} \left(\frac{d \tilde{\underline{\theta}}_{f_i}^T}{dt} \right) \tilde{\underline{\theta}}_{f_i} + \frac{k_i}{b_i} \left(\frac{d \tilde{\underline{\theta}}_{g_i}^T}{dt} \right) \tilde{\underline{\theta}}_{g_i}$$

در صورتی که شرایط (۱۹) و (۲۰) در نظر گرفته شوند و همچنین با استفاده از شرط (۱۵) یک کران بالا برای $\dot{V}$ در رابطه (۳۰) به صورت زیر است:

$$\dot{V} \leq - \sum_{i=1}^n |k_i| \|S_i(t)\| (\eta_i - \|d(t)\| - \|\omega_i\|) < 0 \quad (30)$$

از (۳۰) می توان نتیجه گرفت که سیستم پایدار مجانبی است. بلوک دیاگرام روش پیشنهادی نیز در فلوچارت ۱ ارائه شده است.



فلوچارت ۱: معماری ساختاری سیستم کنترلی سنکرون سازی آشوب مرجع-پیرو مبتنی بر SMC تطبیقی-فازی

۴- شبیه سازی

در این بخش به منظور بررسی صحت روابط به دست آمده سنکرون سازی دو سیستم آشوبناک چن و لورنز بررسی و پیاده سازی می شوند.

۴-۱ شبیه سازی اول

سیستم آشوبناک چن برای اولین بار توسط چن^۱ و یوتا^۲ معرفی شد [۳۳]. در این قسمت دو سیستم چن با شرایط اولیه متفاوت سنکرون سازی می شوند. معادلات سیستم چن به صورت ذیل تعریف می شوند:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a(x_2 - x_1) \\ \dot{x}_2 = (c - a)x_1 - x_1x_3 + cx_2 \\ \dot{x}_3 = x_1x_2 - bx_3 \end{cases} \quad (31)$$

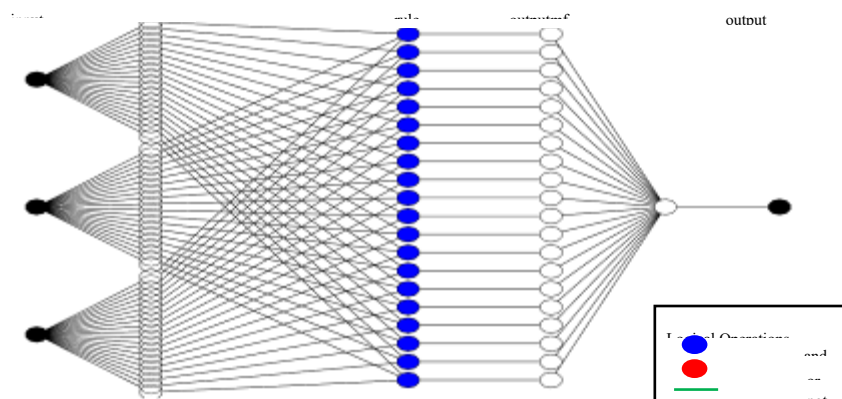
این سیستم را با یک سیستم چن با شرایط اولیه متفاوت سنکرون سازی خواهند شد. به همین منظور سیستم چن با معادلات زیر به عنوان سیستم پیرو در نظر گرفته می شود:

¹ Chen

² Ueta

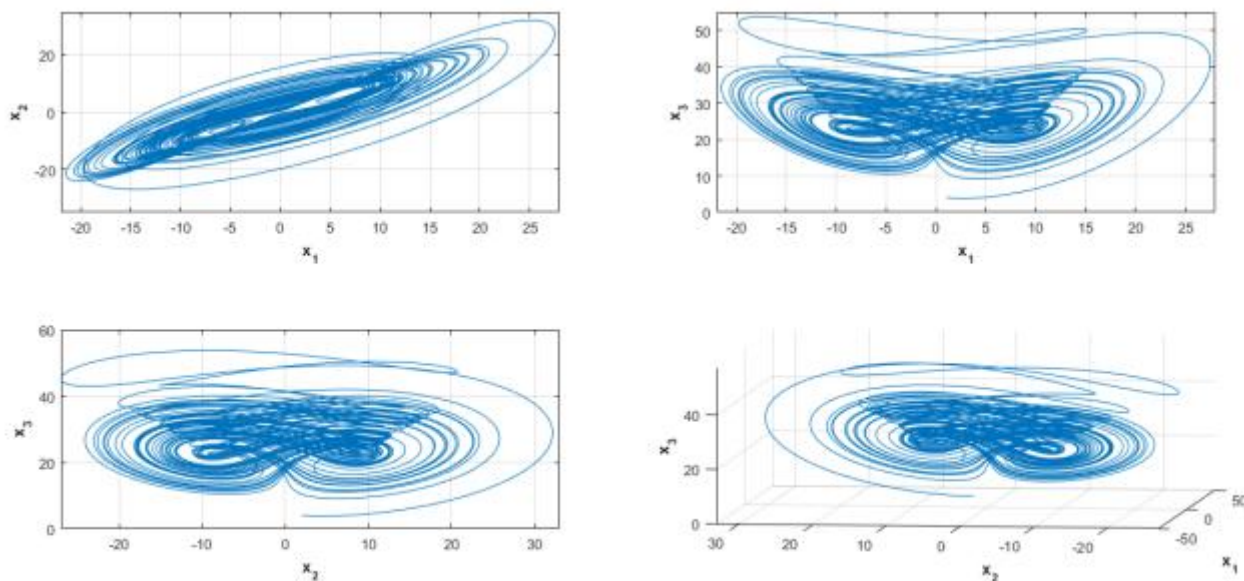
$$\begin{cases} \dot{y}_1 = a(y_2 - y_1) + u_1(t) + d_1(t) \\ \dot{y}_2 = (c - a)y_1 - y_1y_3 + cy_2 + u_2(t) + d_2(t). \\ \dot{y}_3 = y_1y_2 - by_3 + u_3(t) + d_3(t) \end{cases} \quad (32)$$

در این بخش، روش پیشنهادی بر روی دو سیستم چن با معادلات (۳۱) و (۳۲) اعمال شده است. مقادیر اولیه ی سیستم مرجع و سیستم پیرو برابر $(a, b, c) = (35, 3, 28)$ در نظر گرفته شده اند. هر دو سیستم مرجع و پیرو به صورت نامعلوم مدل سازی شده اند و دینامیک های ناشناخته ی آن ها توسط تقریب زننده ی عصبی- فازی تخمین زده می شود. ساختار شبکه ی عصبی- فازی مورد استفاده برای تقریب توابع $f_i(x, \theta_{f_i})$ و $g_i(y, \theta_{g_i})$ ، در شکل ۲ نمایش داده شده است که در آن لایه های ورودی (input)، توابع عضویت ورودی (inputmf)، لایه ورودی (rule)، توابع عضویت خروجی (outputmf) و سپس خروجی (output) مشخص شده اند.



شکل ۲: ساختار شبکه عصبی در نظر گرفته شده برای $f_i(x, \theta_{f_i})$ و $g_i(y, \theta_{g_i})$

تعداد بیست تابع عضویت از نوع گوسی برای $f_i(x, \theta_{f_i})$ و $g_i(y, \theta_{g_i})$ در نظر گرفته شده است. همچنین، تعداد گره های متناظر با قواعد نیز برابر با ۲۰ گره در نظر گرفته شده است. شبکه عصبی تطبیقی- فازی شامل پنج لایه به صورت لایه ورودی، لایه فازی سازی، لایه قواعد بخش مقدم، لایه قواعد بخش تالی، لایه نرمال سازی و خروجی است. شبکه عصبی فازی، پارامترهای $f_i(x, \theta_{f_i})$ و $g_i(y, \theta_{g_i})$ را به گونه ای تعیین می کند که خطای تخمین به حداقل برسد. جاذب سیستم چن در شکل ۳ نمایش داده شده است.



شکل ۳: جاذب سیستم آشوبناک چن

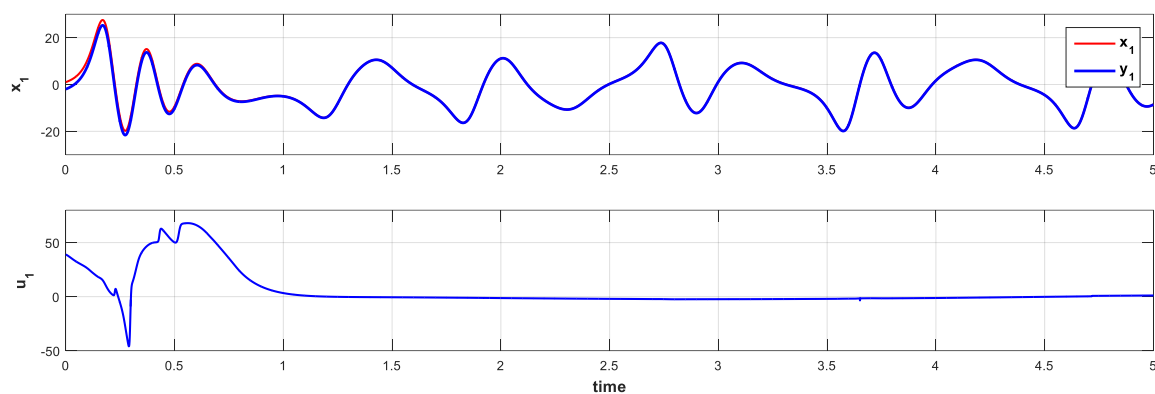
حالت اولیه برای سیستم مرجع برابر $x_0 = [1, 2, 4]^T$ و برای سیستم پیرو برابر $y_0 = [-2, -2, 1]^T$ در نظر گرفته شده است.

مقدار اغتشاش خارجی، $d(t) = \begin{bmatrix} 0.3 \cos(t) \\ 0.2 \sin(t) \\ 0.25 \cos(t) \end{bmatrix}$ فرض شده است. همچنین $\eta = [4, 8, 8]^T$ و برای هر $i = 1, 2, 3$ مقادیر

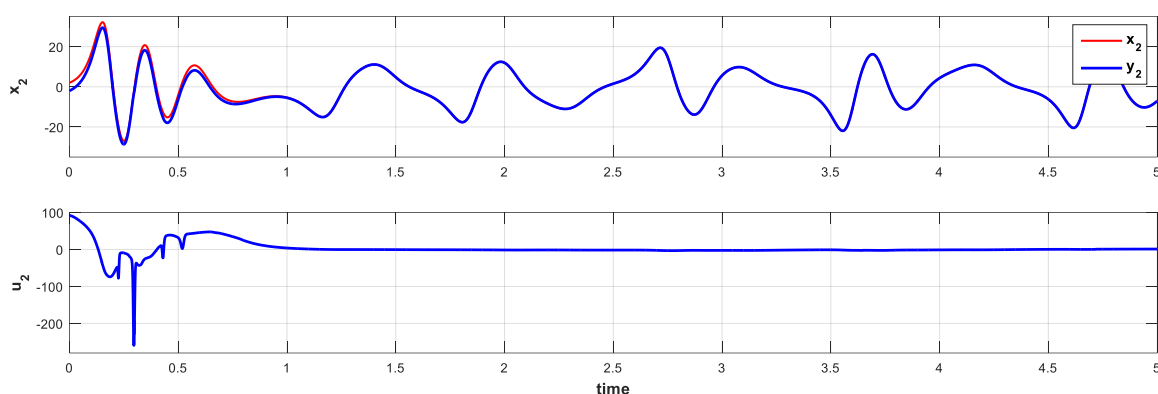
$a_i, b_i = h$ و $k_i = 1$ در نظر گرفته می شود؛ جایی که $h = 0.001$ و زمان نمونه برداری است. ورودی کنترلی با استفاده از رابطه (۱۸) و قواعد تطبیقی معادلات (۱۹) و (۲۰) به صورت زیر است:

$$u(t) = \begin{bmatrix} f_1(x | \underline{\theta}_{f_1}) - g_1(x | \underline{\theta}_{g_1}) - \eta_1 \text{sat}(S_1(t)) \\ f_2(x | \underline{\theta}_{f_2}) - g_2(x | \underline{\theta}_{g_2}) - \eta_2 \text{sat}(S_2(t)) \\ f_3(x | \underline{\theta}_{f_3}) - g_3(x | \underline{\theta}_{g_3}) - \eta_3 \text{sat}(S_3(t)) \end{bmatrix} \quad (33)$$

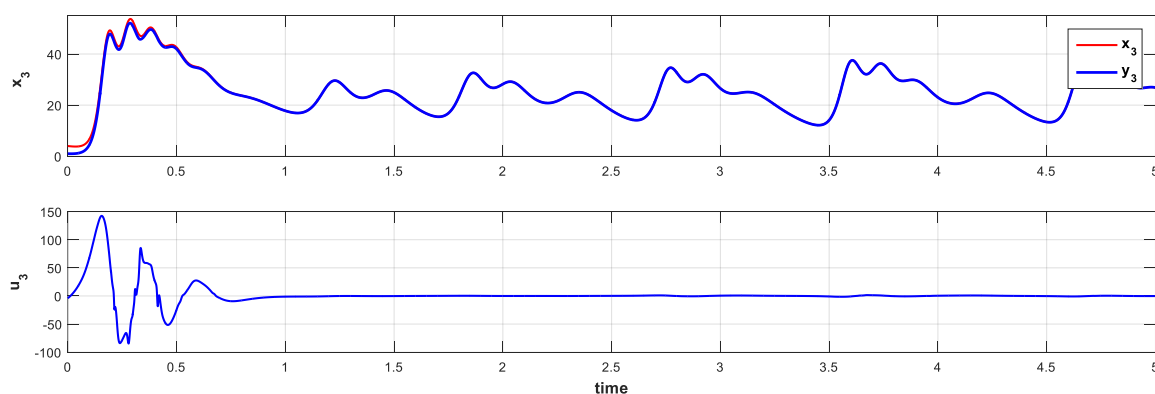
لازم به تذکر است که در رابطه (۳۳) به منظور کاهش چترینگ، به جای تابع علامت از تابع اشباع استفاده می نماییم. نتایج حاصل از پیاده سازی، شامل مسیرهای حالت و سیگنال های کنترلی، در شکل های ۴ و ۵ و ۶ نمایش داده شده اند.



شکل ۴: مسیر حالت های x_1 ، y_1 و سیگنال کنترلی $u_1(t)$ سیستم چن به ازای شرایط اولیه $y_0 = [-2, -2, 1]^T$ و $x_0 = [1, 2, 4]^T$



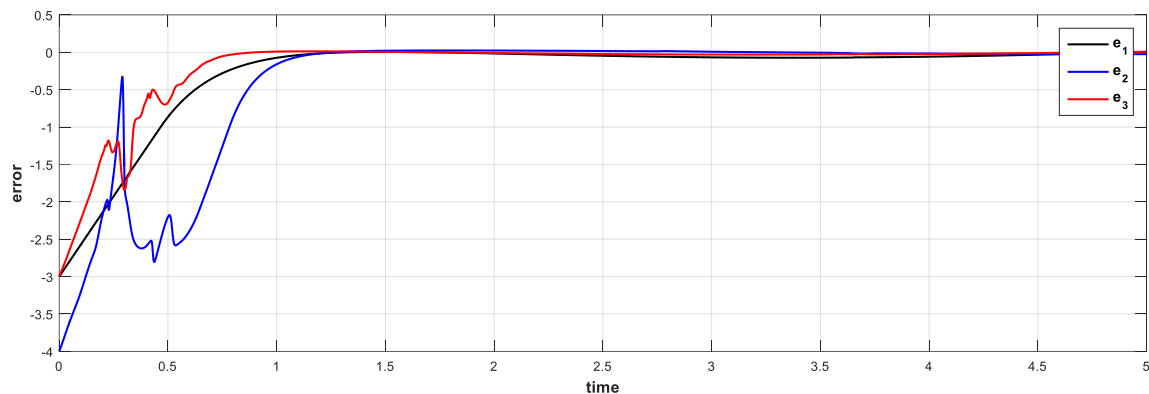
شکل ۵: مسیر حالت های x_2 ، y_2 و سیگنال کنترلی $u_2(t)$ سیستم چن به ازای شرایط اولیه $y_0 = [-2, -2, 1]^T$ و $x_0 = [1, 2, 4]^T$



شکل ۶: مسیر حالت های x_3 ، y_3 و سیگنال کنترلی $u_3(t)$ سیستم چن به ازای شرایط اولیه $y_0 = [-2, -2, 1]^T$ و $x_0 = [1, 2, 4]^T$

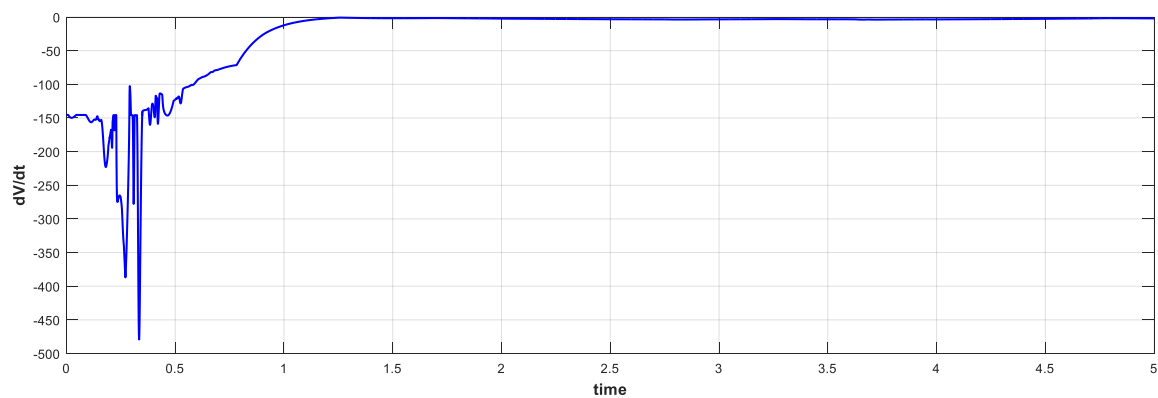
همان طور که مشاهده می شود سیستم پیرو به خوبی سیستم مرجع را دنبال می کند. با توجه به اینکه در لحظه اولیه مقادیر اولیه سیستم های مرجع و پیرو یکسان نیستند، نیروی کنترلی در همان لحظه اولیه مقدار بزرگی را برای سنکرون کردن دو سیستم برمی گزیند.

در نهایت سیگنال کنترلی بعد از زمان محدود به صفر می رسد؛ که به دلیل یکسان بودن سیستم مرجع و پیرو است. سیگنال های خطا، e_1 ، e_2 و e_3 در شکل ۷ مشخص شده است.



شکل ۷: خطای سنکرون سازی e_1 ، e_2 و e_3

برای دو سیستم آشوبناک چن با شرایط اولیه متفاوت در شکل ۷ نمایش داده شده اند. همان گونه که مشاهده می شود، تمامی مؤلفه های خطا به صفر همگرا شده اند که بیانگر تحقق کامل سنکرون سازی است. بر همین اساس، مشتق تابع لیپانوف نیز به عنوان یکی از معیارهای ارزیابی پایداری در شکل ۸ ارائه شده است.



شکل ۸: مقدار $\dot{V}(t)$

با توجه به شکل ۸ مشاهده می شود که مقدار $\dot{V}$ در تمامی لحظات منفی است و حداکثر مقدار $\dot{V}_{\max} = -0.8599$ است.

۲-۴ شبیه سازی دوم

سیستم آشوبناک لورنز برای اولین بار در [۱] معرفی شد. در این بخش دو سیستم لورنز با شرایط اولیه متفاوت سنکرون سازی می شوند. معادلات سیستم لورنز به صورت ذیل تعریف می شوند:

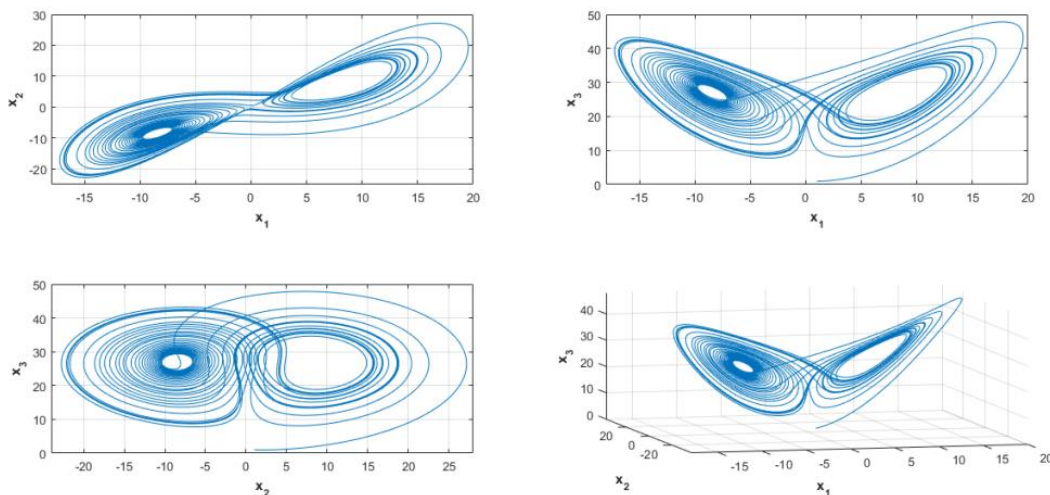
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\sigma(x_1 - x_2) \\ \dot{x}_2 = -x_1x_3 + \rho x_1 - x_2 \\ \dot{x}_3 = x_1x_2 - \beta x_3 \end{cases} \quad (34)$$

این سیستم را با یک سیستم با شرایط اولیه متفاوت سنکرون سازی خواهند شد. به همین منظور سیستم لورنز با معادلات زیر را به عنوان سیستم پیرو در نظر می شود:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = -\sigma(y_1 - y_2) + u_1(t) + d_1(t) \\ \dot{y}_2 = -y_1y_3 + \rho y_1 - y_2 + u_2(t) + d_2(t) \\ \dot{y}_3 = y_1y_2 - \beta y_3 + u_3(t) + d_3(t) \end{cases} \quad (35)$$

در اینجا روش پیشنهاد شده را به سیستم لورنز با معادلات (۳۴) و (۳۵) اعمال می شود که برای هر دو سیستم مرجع و پیرو

جاذب سیستم لورنز نیز در شکل ۹ مشخص شده است. $(\sigma, \beta, \rho) = \left(10, \frac{8}{3}, 28\right)$ است.

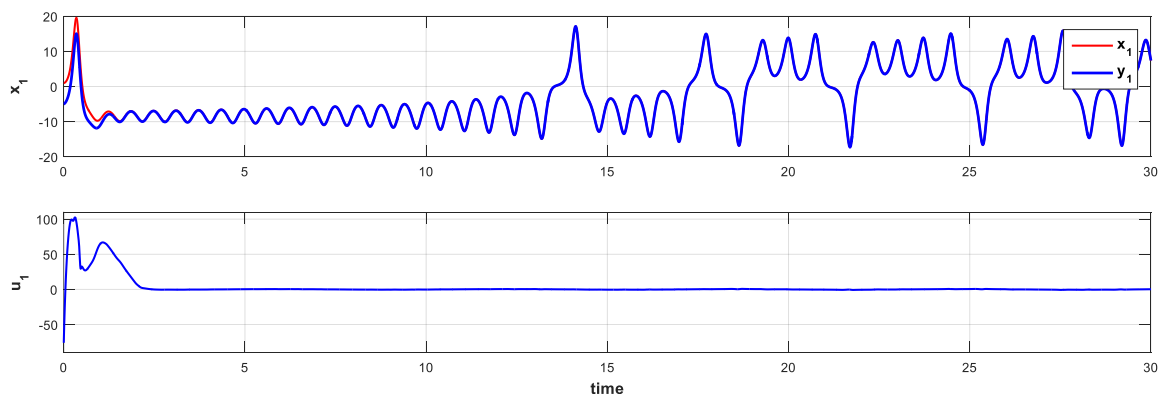


شکل ۹: جاذب های سیستم آشوبناک لورنز

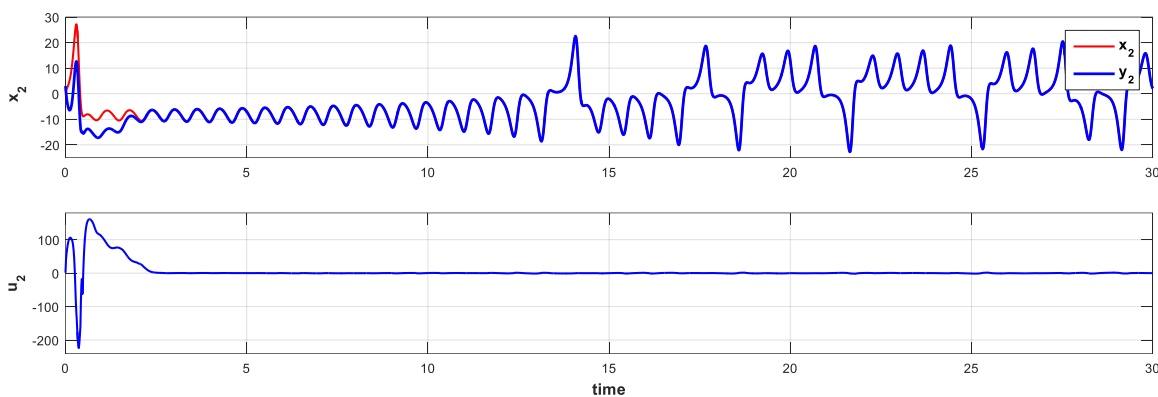
شبکه عصبی در نظر گرفته شده در این بخش نیز مشابه شکل ۲ است؛ که تعداد بیست تابع عضویت از نوع گوسی برای $f_i(x, \theta_{f_i})$ و $g_i(y, \theta_{g_i})$ در نظر گرفته شده است. همچنین تعداد گره های مربوط به قواعد نیز بیست تا هستند حالت اولیه برای سیستم مرجع برابر $x_0 = [1, 1, 1]^T$ و برای سیستم پیرو برابر $y_0 = [-5, 3, -10]^T$ در نظر گرفته شده است. مقدار اغتشاش

خارجی، $d(t) = \begin{bmatrix} 0.3 \cos(t) \\ 0.2 \sin(t) \\ 0.1 \cos(t) \end{bmatrix}$ فرض شده است. همچنین $\eta = [7, 8, 12]^T$ و برای هر $i = 1, 2, 3$ مقادیر $a_i, b_i = h$

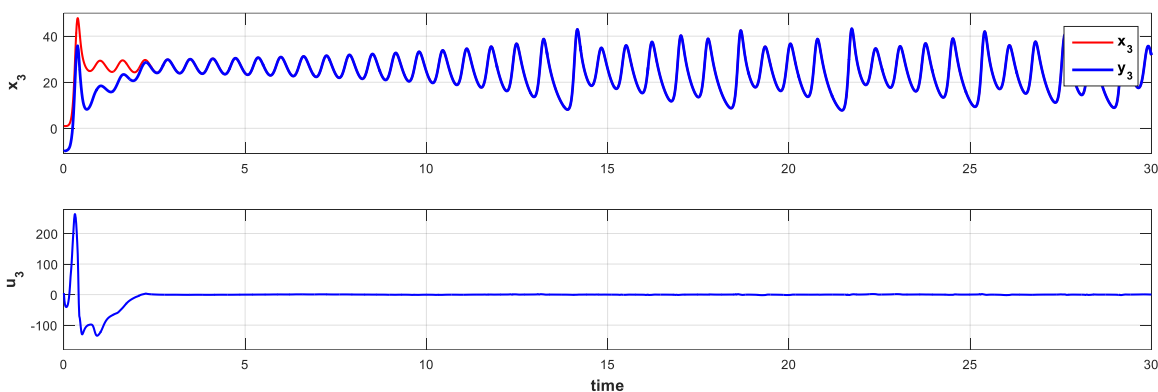
$k_i = 1$ در نظر گرفته می شود؛ چایی که $h = 0.001$ زمان نمونه برداری است. ورودی کنترلی با استفاده از قوانین کنترلی معادله (۳۳) به دست می آید. نتایج حاصل از شبیه سازی برای ۳۰ ثانیه ابتدایی در شکل های ۱۰، ۱۱، ۱۲ و ۱۳ مشخص شده اند.



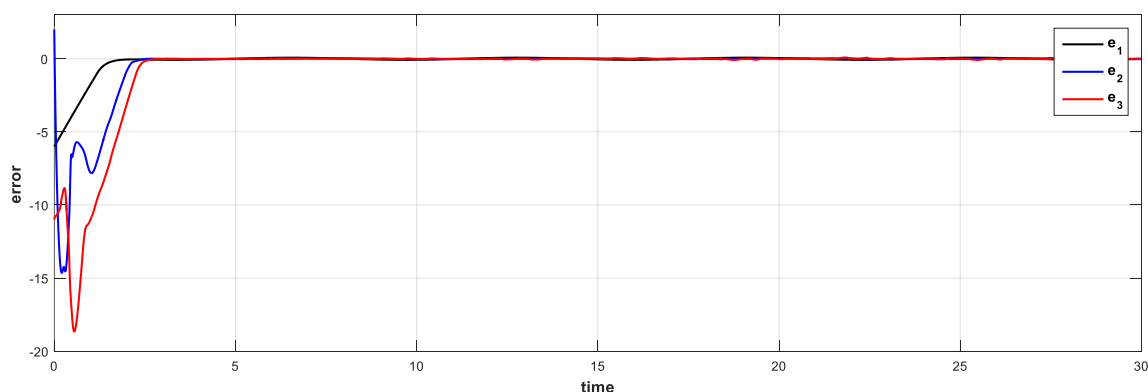
شکل ۱۰: مسیر حالت های x_1 ، y_1 و سیگنال کنترلی $u_1(t)$ سیستم لورنز به ازای شرایط اولیه $x_0 = [1, 1, 1]^T$ و $y_0 = [-5, 3, -10]^T$



شکل ۱۱: مسیر حالت های x_2 ، y_2 و سیگنال کنترلی $u_2(t)$ سیستم لورنز به ازای شرایط اولیه $x_0 = [1, 1, 1]^T$ و $y_0 = [-5, 3, -10]^T$

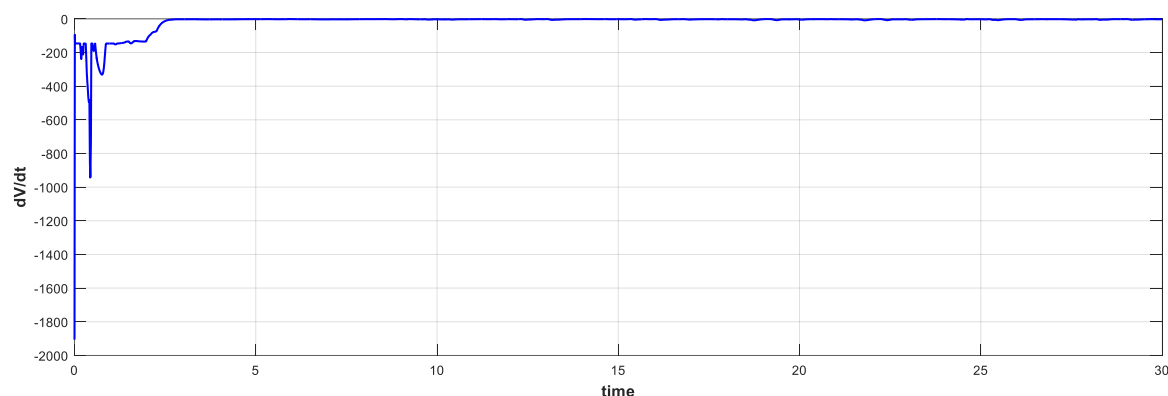


شکل ۱۲: مسیر حالت های x_3 ، y_3 و سیگنال کنترلی $u_3(t)$ سیستم لورنز به ازای شرایط اولیه $x_0 = [1, 1, 1]^T$ و $y_0 = [-5, 3, -10]^T$



شکل ۱۳: خطای سنکرون سازی e_1 ، e_2 و e_3

باتوجه به شکل های ۱۰ تا ۱۳ مشاهده می شود که سیستم پیرو به خوبی سیستم مرجع را دنبال می کند. همچنین دفع اغتشاش نیز به خوبی انجام شده است. با توجه به یکسان بودن سیستم مرجع و پیرو، سیگنال کنترلی بعد از زمان محدود به مقدار صفر رسیده است. مشتق تابع لیاپانوف نیز در این مثال در شکل ۱۴ به عنوان یکی از معیارهای پایداری ارائه شده است.



شکل ۱۴: مقدار $\dot{V}(t)$

با توجه به شکل ۱۴ مقدار $\dot{V}$ در تمامی لحظات منفی است، مقدار $\dot{V}_{\max} = -0.849$ است.

۳-۴ شبیه سازی سوم

در این بخش می خواهیم با استفاده از دینامیک کنترل معرفی شده یک سیستم آشوبناک لورنز را با یک سیستم آشوبناک چن سنکرون سازی کنیم. به این منظور سیستم لورنز را به عنوان مرجع و سیستم چن را به عنوان سیستم پیرو در نظر می گیریم. معادلات سیستم مرجع و پیرو به صورت زیر هستند:

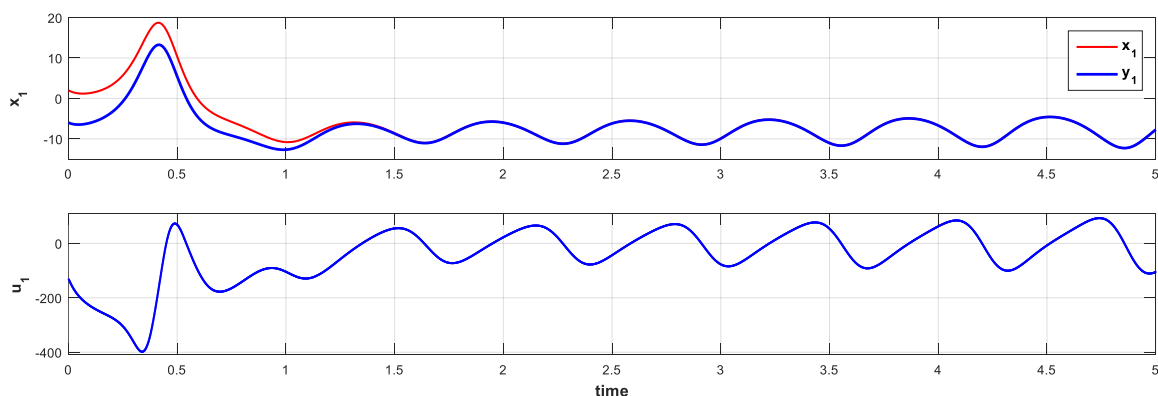
$$\text{Master system (Lorenz)} \begin{cases} \dot{x}_1 = 10(x_2 - x_1) \\ \dot{x}_2 = 28x_1 - x_2 - x_1x_3 \\ \dot{x}_3 = -\frac{8}{3}x_3 + x_1x_2 \end{cases} \quad (36)$$

$$\text{Slave system (Chen)} \begin{cases} \dot{y}_1 = 35(y_2 - y_1) + u_1(t) + d_1(t) \\ \dot{y}_2 = -y_1y_3 + 28y_2 + u_2(t) + d_2(t) \\ \dot{y}_3 = y_1y_2 - 3y_3 + u_3(t) + d_3(t) \end{cases} \quad (37)$$

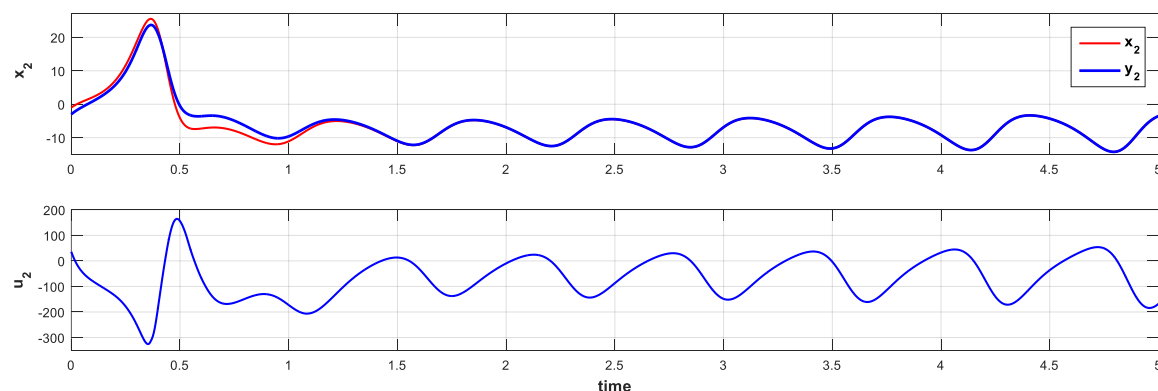
که شرایط اولیه به برای سیستم مرجع به صورت $x_0 = [2, -1, 5]^T$ و همچنین برای سیستم پیرو برابر $y_0 = [-6, -3, 10]^T$

است. اغتشاش خارجی در نظر گرفته شده به صورت $d(t) = \begin{bmatrix} 0.15 \cos(t) \\ 0.1 \sin(t) \\ 0.1 \cos(t) \end{bmatrix}$ است. همچنین $\eta = [6, 6, 10]^T$ و برای هر

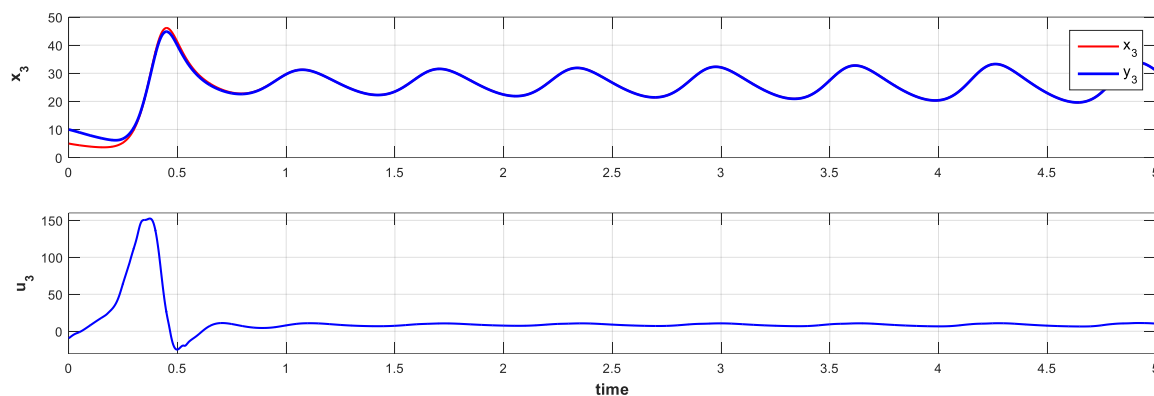
$i = 1, 2, 3$ مقدار $a_i, b_i = h$ و $k_i = 1$ در نظر گرفته می شود. با استفاده از قوانین کنترلی مشابه معادله (۳۳) نتایج شبیه سازی در شکل های ۱۵، ۱۶، ۱۷ و ۱۸ ارائه شده اند.



شکل ۱۵: مسیر حالت های x_1 (لورنز)، y_1 (چن) و سیگنال کنترلی $u_1(t)$ سیستم لورنز به ازای شرایط اولیه $x_0 = [2, -1, 5]^T$ و $y_0 = [-6, -3, 10]^T$

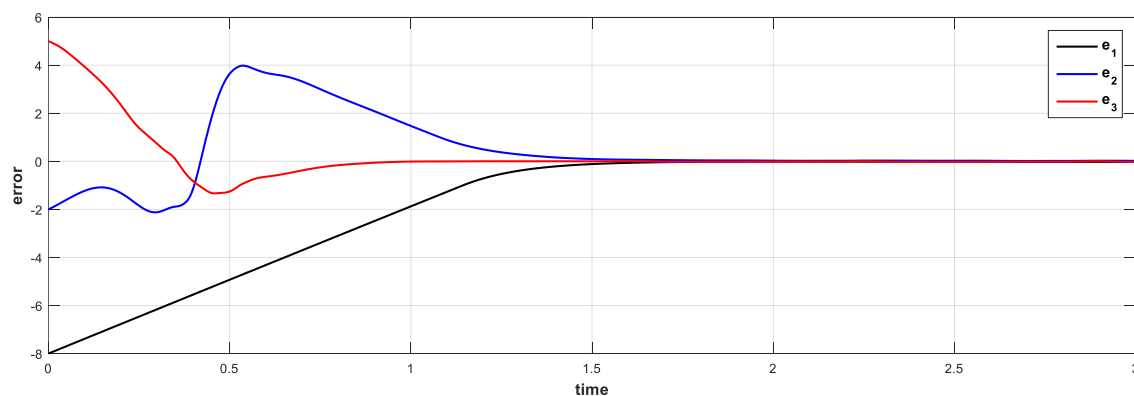


شکل ۱۶: مسیر حالت های x_2 (لورنز)، y_2 (چن) و سیگنال کنترلی $u_2(t)$ سیستم لورنز به ازای شرایط اولیه $x_0 = [2, -1, 5]^T$ و $y_0 = [-6, -3, 10]^T$



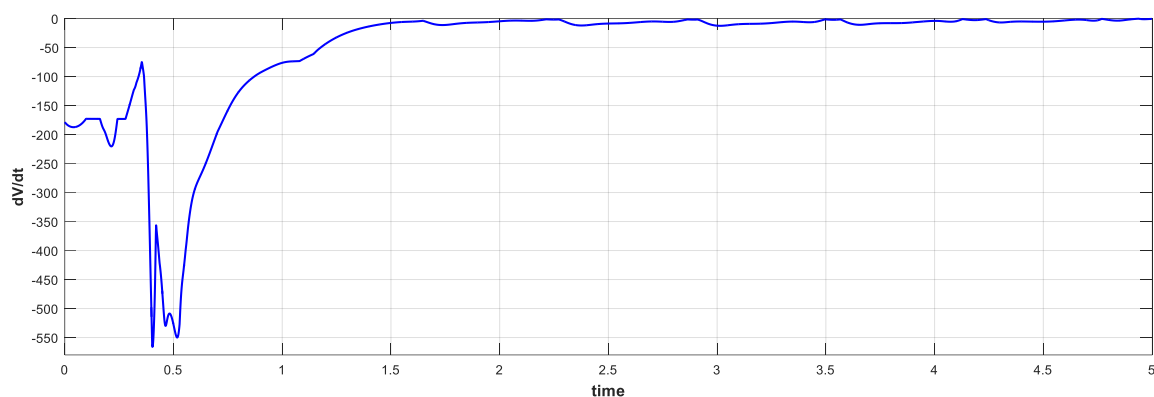
شکل ۱۷: مسیر حالت های x_3 (لورنز)، y_3 (چن) و سیگنال کنترلی $u_3(t)$ سیستم لورنز به ازای شرایط اولیه $x_0 = [2, -1, 5]^T$ و $y_0 = [-6, -3, 10]^T$

سیگنال خط e_1 ، e_2 و e_3 به صورت زیر است:

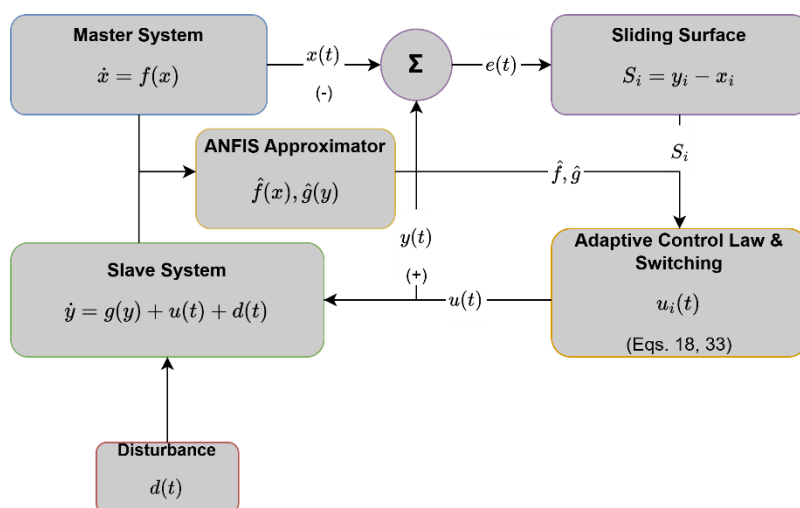


شکل ۱۸: خطای سنکرون سازی e_1 ، e_2 و e_3

همان طور که مشاهده می شود سیستم پیرو به خوبی سیستم مرجع را دنبال می کند؛ همچنین دفع اغتشاش به خوبی انجام شده و خطای سنکرون سازی صفر شده است. با توجه به اینکه سیستم پیرو و مرجع یکسان نیستند، سیگنال کنترلی صفر نشده است و در نهایت در شکل ۱۹، مشتق تابع لیاپانوف نیز به خوبی ارائه شده است.

شکل ۱۹: مقدار $\dot{V}(t)$

می بینیم که مقدار $\dot{V}$ در تمامی لحظات منفی است و بیشینه مقدار $\dot{V}_{\max} = -0.2827$ است. بلوک دیاگرام سیگنالینگ سیستم کنترل نیز در فلوچارت ۲ ارائه شده است.



فلوچارت ۲: بلوک دیاگرام جریان سیگنال ها و حلقه های فیدبک در سیستم کنترلی پیشنهادی

نتیجه گیری

در این مقاله به منظور کنترل سیستم های آشوبناک غیر کانونیکال یک روش جدید کنترل مبتنی بر مود لغزشی تطبیقی-فازی ارائه شد و پایداری آن با استفاده از تئوری لیپانوف اثبات گردید. پارامترهای آزاد سیستم عصبی تطبیقی-فازی تخمین زده شدند و با استفاده از قواعد تطبیقی، نیروی کنترلی لازم برای سنکرون سازی دو سیستم به دست آمد. شبیه سازی های عددی برای سنکرون سازی دو سیستم چن با شرایط اولیه متفاوت، دو سیستم آشوبناک لورنز با شرایط اولیه متفاوت و همچنین سنکرون سازی یک سیستم لورنز با یک سیستم چن مؤثر بودن روش پیشنهادی را تأیید کرد.

مراجع

- [1] Sparrow C., "The Lorenz attractor: Bifurcations, Chaos and Strange Attractors" ed: Springer-Verlag, New York, 1982.
- [2] Yu H., "Research on Three Sliding Mode Synchronization Approaches for a Class of Improved Fractional-Order Hyperchaotic Financial Systems" Engineering Letters. 2026 Mar 1;34(3):881.
- [3] Ghamari S., "Aziz A, Habibi D. A Novel Hybrid Robust Transfer Learning-Based Adaptive Fractional-Order Super-Twisting Sliding Mode Controller Enhanced for Speed Regulation of Brushless DC Motor" IET Control Theory & Applications. 2026 Jan;20(1):e70129.
- [4] Sravanthi G., "Rosalina KM, Reddy TR. Fuzzy logic sliding mode controller based solar PV fed UPQC for improvement of dynamic performance and power quality enhancement in distribution power system" Scientific Reports. 2026 Mar 12;16(1):13319.
- [5] Y.-N. Li, L. Chen, Z.-S. Cai, and X.-z. Zhao, "Experimental study of chaos synchronization in the Belousov-Zhabotinsky chemical system" Chaos, Solitons & Fractals, 2004, vol. 22, pp. 767-771.
- [6] K. J. Y. D. K. HUANG and R. HAI, "An encryption approach to digital communication by using spatiotemporal chaos synchronization" Acta Physica Sinica, 2001, vol. 10, p. 006.
- [7] A. Kiani-B, K. Fallahi, N. Pariz, and H. Leung, "A chaotic secure communication scheme using fractional chaotic systems based on an extended fractional Kalman filter" Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2009, vol. 14, pp. 863-879.
- [8] X.-L. An, J.-N. Yu, Y.-Z. Li, Y.-D. Chu, J.-G. Zhang, and X.-F. Li, "Design of a new multistage chaos synchronized system for secure communications and study on noise perturbation" Mathematical and Computer Modelling, 2011, vol. 54, pp. 7-18.
- [9] L. M. Pecora and T. L. Carroll, "Synchronization in chaotic systems" Physical review letters, 1990, vol. 64, p. 821.
- [10] S. Vaidyanathan, S. Sampath, and A. T. Azar, "Global chaos synchronisation of identical chaotic systems via novel sliding mode control method and its application to Zhu system" International Journal of Modelling, Identification and Control, 2015, vol. 23, pp. 92-100.
- [11] V. Sundarapandian, "Adaptive control and synchronization design for the Lu-Xiao chaotic system" in Computer Networks & Communications (NetCom), ed: Springer, 2013, pp. 319-327.
- [12] A. Boulkroune, S. Hamel, A. T. Azar, and S. Vaidyanathan, "Fuzzy Control-Based Function Synchronization of Unknown Chaotic Systems with Dead-Zone Input" in Advances in Chaos Theory and Intelligent Control, ed: Springer, 2016, pp. 699-718.
- [13] M. Rafikov and J. M. Balthazar, "On control and synchronization in chaotic and hyperchaotic systems via linear feedback control" Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2008, vol. 13, pp. 1246-1255.
- [14] M. P. Aghababa and B. Hashtarkhani, "A new adaptive observer design for a class of nonautonomous complex chaotic systems" Complexity, 2015, vol. 21, pp. 145-153.
- [15] M. Faieghi and D. Baleanu, "Sampled-data nonlinear observer design for chaos synchronization: a Lyapunov-based approach" Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2014, vol. 19, pp. 2444-2453.
- [16] A. Senouci and A. Boukabou, "Predictive control and synchronization of chaotic and hyperchaotic systems based on a T-S fuzzy model" Mathematics and Computers in Simulation, 2014, vol. 105, pp. 62-78.
- [17] I. U. Vadim, "Survey paper variable structure systems with sliding modes" IEEE Transactions on Automatic control, 1977, vol. 22, pp. 212-222.
- [18] Y. Xia and Y. Jia, "Robust sliding mode control for uncertain time-delay systems: an LMI approach" in Proceedings of the American control conference, 2002, pp. 53-58.

- [19] Y. Niu, D. W. Ho, and J. Lam, "Robust integral sliding mode control for uncertain stochastic systems with time-varying delay" *Automatica*, 2005, vol. 41, pp. 873-880.
- [20] J.-C. Juang and C.-M. Lee, "Design of sliding mode controllers with bounded L 2 gain performance: an LMI approach" *International Journal of Control*, 2005, vol. 78, pp. 647-661.
- [21] H. Delavari, R. Ghaderi, A. Ranjbar, and S. Momani, "Fuzzy fractional order sliding mode controller for nonlinear systems" *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2010, vol. 15, pp. 963-978.
- [22] H.-T. Yau, "Design of adaptive sliding mode controller for chaos synchronization with uncertainties" *Chaos, Solitons & Fractals*, 2004, vol. 22, pp. 341-347.
- [23] J.-J. Yan, Y.-S. Yang, T.-Y. Chiang, and C.-Y. Chen, "Robust synchronization of unified chaotic systems via sliding mode control" *Chaos, Solitons & Fractals*, 2007, vol. 34, pp. 947-954.
- [24] H. Wang, Z.-z. Han, Q.-y. Xie, and W. Zhang, "Sliding mode control for chaotic systems based on LMI" *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2009, vol. 14, pp. 1410-1417.
- [25] H.-T. Yau and C.-L. Chen, "Chattering-free fuzzy sliding-mode control strategy for uncertain chaotic systems" *Chaos, Solitons & Fractals*, 2006, vol. 30, pp. 709-718.
- [26] S. Vaidyanathan and S. Sampath, "Global chaos synchronization of hyperchaotic Lorenz systems by sliding mode control" in *Advances in Digital Image Processing and Information Technology*, ed: Springer, pp. 156-164, 2011.
- [27] M. Sugeno, "On stability of fuzzy systems expressed by fuzzy rules with singleton consequents" *IEEE Transactions on Fuzzy systems*, 1999, vol. 7, pp. 201-224.
- [28] T. Takagi and M. Sugeno, "Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control" *IEEE transactions on systems, man, and cybernetics*, 1985, pp. 116-132.
- [29] M. C. Teixeira and S. H. Zak, "Stabilizing controller design for uncertain nonlinear systems using fuzzy models" *IEEE Transactions on fuzzy systems*, 1999, vol. 7, pp. 133-142.
- [30] A. Abraham, "Adaptation of fuzzy inference system using neural learning" in *Fuzzy systems engineering*, ed: Springer, 2005, pp. 53-83.
- [31] J.-S. Jang, "ANFIS: adaptive-network-based fuzzy inference system" *IEEE transactions on systems, man, and cybernetics*, 1993, vol. 23, pp. 665-685.
- [32] J. L. Castro, "Fuzzy logic controllers are universal approximators" *IEEE transactions on systems, man, and cybernetics*, 1995, vol. 25, pp. 629-635.
- [33] G. Chen and T. Ueta, "Yet another chaotic attractor" *International Journal of Bifurcation and chaos*, 1999, vol. 9, pp. 1465-1466.